Développements numériques pour le modèle MARS

Thomas Duhaut, Marc Honnorat, Laurent Debreu

INRIA Rhône-Alpes, Laboratoire Jean Kuntzmann, Grenoble

31 mai 2008

Contrat PREVIMER - Ref : 06/2 210 290

Table des matières

I Applications **9**

1 MARS : Configurations réalistes **11**
1.1 Introduction générale de MARS . . . 11
1.2 Mer d'Iroise . . . 12
1.3 Golfe de Gascogne . . . 16
1.4 Méditérannée : golfe du Lion . . . 22
1.5 Région des Charentes-Maritimes . . . 28

2 Description et configuration des cas test **31**
2.1 Introduction . . . 31
2.2 Vortex Barocline . . . 32
2.3 Vortex Barotrope . . . 36
2.4 Jet Barotrope . . . 43
2.5 Smolarkiewicz . . . 53

II Etudes numériques **55**

3 Schémas 2D **57**
3.1 Schéma barotrope du code MARS . . . 57
3.2 Analyse 1D du schéma original de MARS . . . 63
3.3 Analyse du terme de Coriolis . . . 71
3.4 Analyse 2D du schéma original de MARS . . . 73

4 Couplage barotrope/barocline (3D) du code MARS **77**
4.1 Équations considérées . . . 77
4.2 Discrétisation verticale . . . 77
4.3 Schéma numérique complet . . . 78
4.4 Analyse numérique . . . 79
4.5 Conclusion . . . 80
4.6 Etude du schéma temporel 3D . . . 80

5 Schémas d'advection **83**
5.1 Etude de l'action du limiteur Upwind . . . 83

III Développements **99**

6 Un nouveau schéma 2D **101**
6.1 Schéma 2D linéarisé . . . 101
6.2 Analyse numérique . . . 102
6.3 Conclusion . . . 103
6.4 Cas test 2D . . . 104
6.5 Cas test 3D . . . 117

7 Etude du schéma temporel 3D **121**
7.1 Vue d'ensemble du schéma temporel 2D-3D . . . 122
7.2 Coriolis . . . 124
7.3 Couplage vitesses - traceurs . . . 124

8 Schémas d'advection **127**
8.1 Principes généraux sur les schémas d'advection . . . 127
8.2 Schémas d'advection 1D . . . 128
8.3 Schémas d'advection 2D . . . 134
8.4 Cas tests 2D . . . 137
8.5 Cas tests 3D . . . 149
8.6 Conclusion . . . 151

9 Bancs découvrants **153**
9.1 Schéma actuel . . . 153
9.2 Méthode FCT : Flux Corrected Transport . . . 154
9.3 Préservation d'une hauteur d'eau positive : proposition de modification . . . 156
9.4 Application au modèle MARS : algorithme . . . 157

A Paramètres des configurations réalistes **163**
A.1 Mer Iroise . . . 163
A.2 Golfe de Gascogne . . . 182
A.3 Méditérannée . . . 187

B Paramètres de simulation des cas tests **193**
B.1 Vortex Barocline . . . 193
B.2 Vortex Barotrope . . . 194
B.3 Jet barotrope . . . 194
B.4 Test Smolarkiewicz . . . 195

Introduction

La simulation numérique des écoulements océaniques bénéficie depuis plusieurs années de la constante augmentation des ressources de calcul (capacité mémoire et puissance de calcul). Ceci permet actuellement d'atteindre des résolutions spatio-temporelles très élevées et induit un accroissement des phénomènes physiques potentiellement représentés par un modèle numérique. Les méthodes numériques habituellement utilisées peuvent alors devenir des freins à ce développement. L'Ifremer développe un outil de modélisation numérique pour l'océan côtier, le modèle MARS, depuis une dizaine d'années. Les personnels qui ont contribué au développement de ce modèle sont des océanographes qui ont utilisé l'état de l'art pour les objectifs visés. Il faut donc évaluer les méthodes numériques employées dans MARS et tenter de les améliorer. Cette étude vise à permettre au modèle numérique MARS d'évoluer au mieux dans la représentation des processus physiques en s'appuyant sur des schémas numériques performants. Un modèle numérique d'océan est un tout et plutôt que de s'attacher à un élément numérique particulier, il est important de prendre également en compte l'interaction entre certains points clefs du modèle. Par exemple, le choix du schéma temporel est fortement conditionné par ses possibilités d'utilisation couplée à des schémas d'advection performants et à une écriture simple de principes de conservation. Le choix du caractère implicite ou explicite du schéma temporel utilisé dans le mode barotrope a également un impact important sur la méthode de couplage barotrope/barocline mise en oeuvre, avec comme objectif de garantir une stabilité maximale de l'ensemble. Lors de cette étude, nous avons procédé à une analyse mathématique des différents aspects numériques du modèle MARS dans sa forme actuelle. Des développements ont ensuite effectués sur les points évoqués précédemment : schéma d'advection, schéma temporel et couplage barotrope/barocline.

Le rapport est scindé en trois parties. Il débute par une présentation de quelques applications réalistes cibles du modèle MARS : golfe de Gascogne (en particulier pour les problèmes posés par le talus), Baie du mont Saint Michel (pour ses larges estrans) et Méditerranée (pour la très forte activité méso-échelle du courant Liguro-provençal).

Suit une étude de certains aspects numériques du modèle : schéma temporel 2D (étude du schéma implicite pour la propagation des ondes de gravité, propriétés de dissipation et dispersion, comparaison par rapport à un méthode de time splitting), schéma d'advection et schéma temporel 3D.

Dans une troisième partie, certains développements sont proposés. Une modification du schéma temporel 2D est notamment présentée et testée, dans des cas idéalisés, sur une configuration réaliste 2D et sur un cas test 3D (vortex barocline). Plusieurs schémas d'advection sont également passés en revue, avec l'objectif d'augmenter l'ordre du schéma en temps ainsi que de palier aux problèmes induit par l'utilisation d'un limiteur tout ou rien dans le schéma actuel. Enfin une idée de traitement des bancs découvrants, dans l'objectif principal de préserver d'une hauteur d'eau positive, est présentée.

Première partie

Applications

Chapitre 1

MARS : Configurations réalistes

Sommaire

1.1 Introduction générale de MARS 11
1.2 Mer d'Iroise 12
1.2.1 Introduction 12
1.2.2 Conditions initiales et données météorologiques 14
1.2.3 Rang 0 ou configuration MANCHE 15
1.3 Golfe de Gascogne 16
1.3.1 Introduction 16
1.3.2 Conditions initiales et données météorologiques 20
1.4 Méditérannée : golfe du Lion 22
1.4.1 Introduction 22
1.4.2 Conditions initiales et données météorologiques 28
1.5 Région des Charentes-Maritimes 28
1.5.1 Introduction 28
1.5.2 Conditions initiales et données météorologiques 28

1.1 Introduction générale de MARS

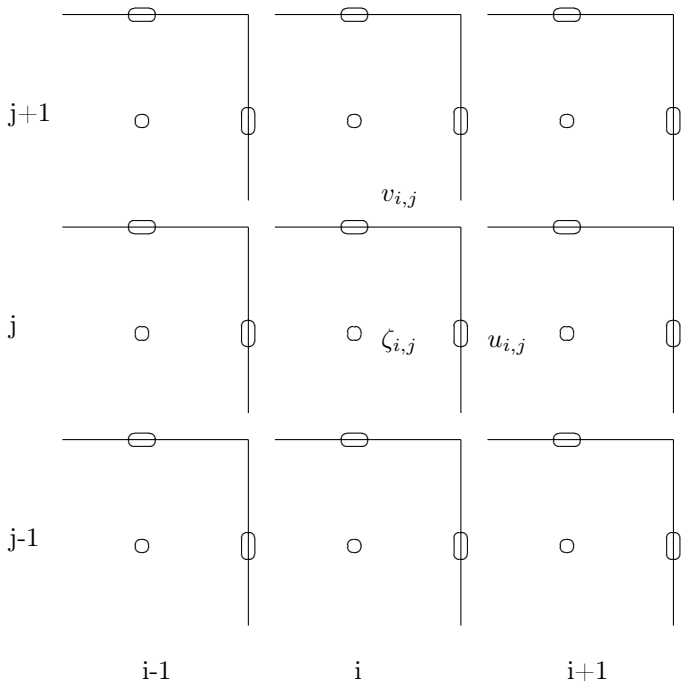
MARS (Model for Applications at Regional Scale) est un modèle numérique en différences finies développé au sein du département DYNECO/PHYSED de l'IFREMER. Ce modèle a pour objectif la représentation de la circulation océanique de l'environement côtier. Dans ce but, il a été écrit de manière à tenir compte des forçages présents dans ces zones frontalières (forçage de marée, de vent, salinité , température, flux de chaleur, rejets fluviaux) afin de rendre compte au mieux des différents phénomènes observables (panaches fluviaux, courant de marée, upwelling, phénomène de bancs découvrants, cycle saisonier des propriétés thermodynamiques de l'océan).

Le code est basé sur la discrétisation des équations primitives qui sont une réécriture des équations fondamentales de Navier-Stokes sous les hypothèses de milieu en rotation, d'approximation de Boussinesq, d'hypothèse hydrostatique, de petites échelles spatiales horizontales par rapport au rayon terrestre et de petites échelles spatiales verticales par rapport à celles horizontales. A ces équations de dynamique, sont associées des équations de thermodynamiques, faisant intervenir les champs de température et de salinité, ainsi que des équations de turbulence permettant de modéliser les processus de mélange dans les couches limites. Un bon nombre de possibilités sont offertes à l'utilisateur au niveau de modules indépendants et/ou externes à la dynamique permettant, par exemple, de réaliser du transport de sédiments ou encore de production primaire (plancton) mais aussi une panoplie de schémas numériques pour modéliser les processus physiques (la dissipation, le forçage du au vent, la turbulence) selon ses besoins.

La modélisation de configurations réalistes à l'aide MARS, est le plus souvent réalisé à l'aide d'emboitements successifs (appellés rangs) permettant d'affiner la modélisation des processus dans des zones précises en augmentant la résolution tout en conservant des temps de calcul raisonables. Dans ce cas, la simulation

de rang inférieur (c'est à dire de résolution plus grossière) sert alors à obtenir les conditions aux limites pour le rang supérieur.

La résolution des équations est faite sur une grille horizontale de type C d'ARAKAWA (1966) (suivant le schéma décrit ci-dessous) dans un système de coordonnées σ (Blumberg and Mellor, 1987) sur la verticale. Le modèle utilise une formulation semi-implicite pour l'intégration temporelle (A.D.I.) et, dans le cas 3D, une méthode de séparation des modes internes et externe. Un algorithme de type prédicteur/correcteur est mise en oeuvre afin d'assurer la convergence de la somme des modes baroclines vers le mode barotrope. Une option prédicteur/correcteur peut également être utilisé dans le cas du calcul en deux dimensions.



Mise en oeuvre d'une configuration Afin de modéliser une zone de l'océan, il est nécessaire de fournir à MARS des fichiers de paramètres, de topographies et éventuellement de forçage.

Les fichiers de paramètres sont de 2 types : ceux qui sont communs à tous les rangs et ceux spécifiques à chaque rang (des examples de ces fichiers sont fournis en Annexe de ce documents pour les configurations réalistes qui seront dévelopées ultérieurement). Les données de topographie définissent la zone géographique des différents rangs de la configuration et la bathymetrie correspondantes. Enfin, on peut spécifier les différents forçages utiles à la configuration voulue. MARS peut utiliser des champs de données fictifs ou réalistes ou encore des forçages permanents et ce pour tous les types de forçages possibles dans MARS (vent, flux radiatif, marée).

La mise en place des configurations réalistes est effectuée dans l'optique de réaliser des tests d'intercomparaison entre les modèles avant et aprés modifications afin de pouvoir en quantifier les impacts. Les régions considérées pour ces configurations réalistes contiennent des spécificitées propres permettant de mettre à l'épreuve les nouveaux schémas numériques implémentés. Les domaines correspondant seront la Mer d'Iroise, avec le front de Ouessant, le golfe de Gascogne avec les problèmes posés par la bathymétrie (talus continental), la Méditerrané avec la présence d'un champ intense de tourbillons associés à l'instabilité du courant Liguro-Provençal et pour finir une zone du golfe de Gascogne centrée sur l'ile d'Oléron servira de support à l'évaluation des routines traitant les phénomènes de bancs découvrants.

1.2 Mer d'Iroise

1.2.1 Introduction

La première configuration porte sur la région de la Mer d'Iroise. Cette région couvre la zone comprise entre les latitudes 47.45 et 50.8 degrés Nord et entre les longitudes 6.6 et 2.333 degré Ouest. La particularité de ce domaine est la faible profondeur (entre 0 et 140m), ce qui à un impact important sur les phénomènes

observables dans cette zone (Fig 1.1). Cette zone est le raffinement d'une zone de rang_0 plus vaste s'étendant de 40 à 65 degré de latitude Nord et de 20 degré Ouest à 15 degré Est en longitude.

Ce domaine possédera également une zone de raffinement supérieure, utilisant les propriétés de zoom du code Agrif, focalisant le calcul sur le développement d'une structure frontale thermodynamique au large de l'ile d'Ouessant. Cette structure, appelée le front d'Ouessant, est le résultat des effets antagonistes du processus de mélange de la colonne d'eau induit par la marée et du réchauffement du haut de la colonne d'eau à la sortie de l'hiver sous les effets combinés d'une augmentation de la radiation solaire incidente et de la diminution des vents responsables en grande partie de la perte de chaleur de l'océan.

Dans cette région cotière on observe un fort signal de marée. Celle-ci se propage du sud au nord, contourne la pointe Finistère et remonte le long de la Manche. L'amplitude et la vitesse du courant sont directement reliés à la topographie de la zone (Le Cann, 1982). On va pouvoir distinguer des zones de fort courant comme sur le Fromveur (entre Molène et Ouessant) ou le Raz-de-Sein. Mais aussi des zones beaucoup plus calmes comme le sud finistère ou la baie de Douarnenez. Cette répartition géographique de la marée est une donnée essentielle pour pouvoir décrire au mieux le phénomène du front thermique.

Le front d'Ouessant est observable depuis l'été jusqu'en automne. Il est caractérisé par une bande d'eau relativement froide qui s'étend de la pointe du Finistère à la Manche.

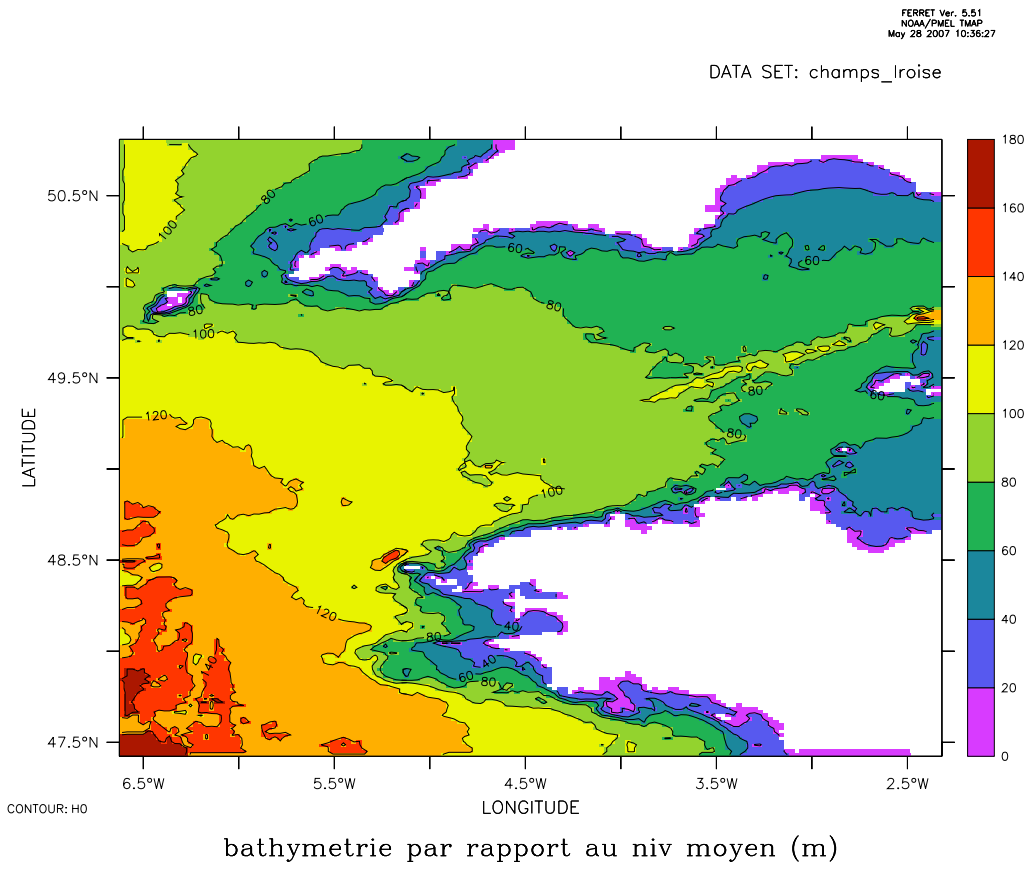


FIG. 1.1 – Emprise et bathymétrie d'un rang 1 de la configuration de la mer d'Iroise.

Fig 1.2 présente clairement ce front thermique à l'ouest du Finistère. On peut également remarquer qu'au large de la présqu'ile de Crozon, le front est double. En effet, une bande cotière d'eau plus chaude le sépare de la cote. On appele cette partie le front intérieur. Le front plus à l'ouest est donc nommé le front extérieur. Cela délimite trois régions.

La première région, cotière comprise entre la côte et le premier front, présente une thermodynamique dominé par le réchauffement de la surface de la mer. Ici les courants de marée ne produisent pas suffisament de mélange pour empêcher la formation de la thermocline saisonière (la thermocline est une zone de fort

gradient de densité présente dans la couche supérieure de l'océan, on distingue deux type de thermoclines : la thermocline permanente qui se trouve vers 1000m de profondeur et la thermocline saisonnière liée au réchauffement des couches superficielles de l'océan, se trouve dans les 200 premiers mètres). La seconde région, la langue d'eau plus froide, est quant à elle dominée par le mélange du à la marée. La combinaison entre la profondeur relativement faible et la présence forte de l'onde de marée en fait une zone où le mélange inhibe l'établissement de stratification en température. Et la dernière, à l'ouest de Ouessant, l'océan étant plus profond, le processus de mélange ne parvient pas à mélanger la colonne d'eau sur tout sa hauteur. Le réchauffement de la surface est alors possible. On observe alors l'établissement de la thermocline saisonnière.

Le mélange n'est pas pour autant le seul responsable de l'inhibition de la thermocline. En effet, Le Cann (1982) a démontré que les ondes de marée internes générées par le signal barotrope provoquent de larges mouvements sur la verticale et augmente ainsi l'efficacité du mélange de la colonne d'eau sur toute sa hauteur.

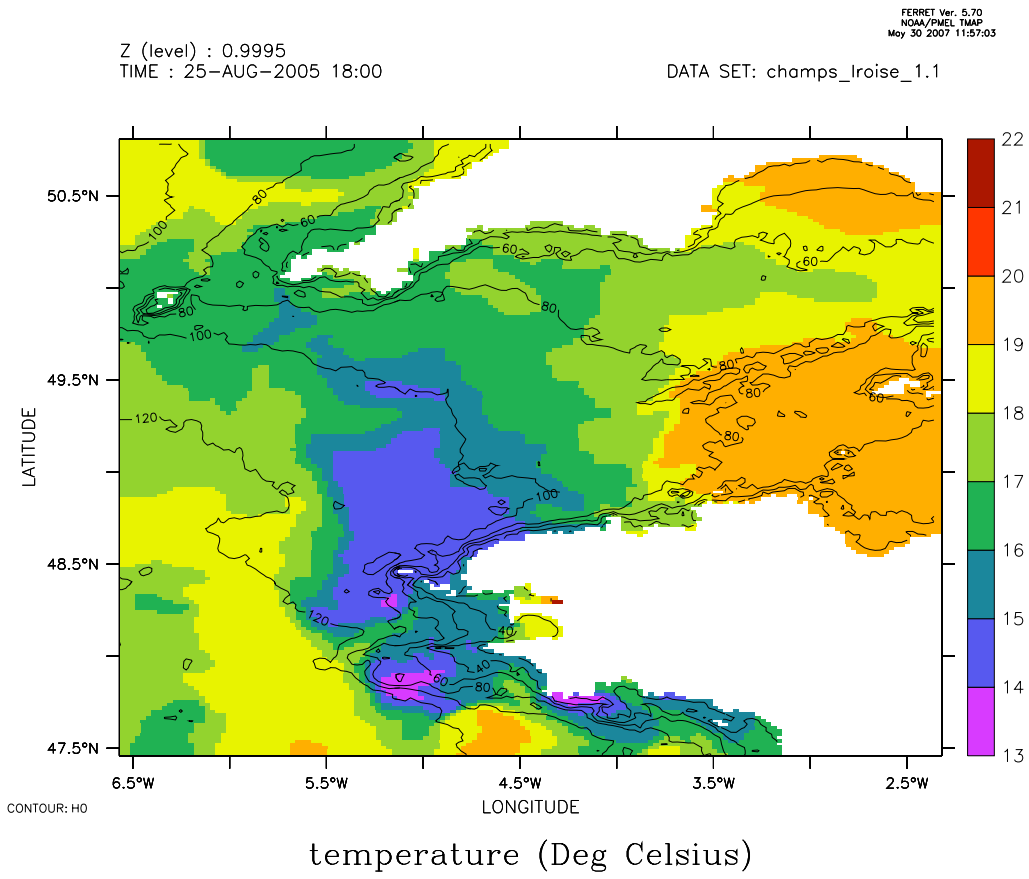


FIG. 1.2 – Température de surface de la mer (SST), sortie du modèle MARS.

1.2.2 Conditions initiales et données météorologiques

Les runs concernant cette configuration sont realisés à l'aide de conditions initiales homogènes en température et salinité, avec un océan au repos.

Le rang 0 est forcé à l'aide de données météorologiques provenant des données WRF (Weather Research Forecast) sur la période du 3 Mars au 10 Novembre 2005. La couverture spatiale a une maille de 20km et les données sont fournies toutes les 3 heures. Ces données fournissent l'ensemble des forcages thermodynamiques pour la région.

Les grandeurs physiques sont :

- Le vent à 10 mètres de la surface($\mathrm{m.s^{-1}}$) ;
- la radiation incidente solaire ($\mathrm{W.m^{-2}}$) ;

- le flux infra-rouge radiatif ($W.m^{-2}$) ;
- le flux de chaleur latent ($W.m^{-2}$) ;
- le flux de chaleur sensible ($W.m^{-2}$) ;
- l'humidité relative (%) ;
- la pression atmosphérique (Pa) ;
- le Water Vapour Mixing Ratio ;
- la température de l'atmosphère à 2m de la surface.

Le rang 0 est calculé pour un océan dit homogène (pas de modification des grandeurs physiques le long de la hauteur de la colonne d'eau). Le calcul est alors effectué suivant les équations Shallow Water, en tenant compte de la marée, de la pression atmosphérique et des forcages thermiques. La marée est générée à partir des constantes harmoniques fournies par l'atlas fes2004.

Pour le rang 1, le calcul est réalisé en 3 dimensions. A l'aide du rang 0, on établit, en terme de hauteurs d'eau, les conditions aux limites du domaine pour les simulations du rang 1. Tout comme pour le rang 0, la condition initiale est homogène en température et salinité, et au repos en courant.

Le forçage est également donné par les données WRF. Mais cette fois-ci la couverture spatiale possède une résolution de 18km. De plus, des observations sont fournies cette fois toutes les heures. Les grandeurs physiques sont les mêmes que dans le cas du champs de données de 20km de résolution.

1.2.3 Rang 0 ou configuration MANCHE

Le rang 0 de cette configuration de la Mer d'Iroise fait intervenir MARS en configuration 2D. Cette configuration basse résolutiuon permet d'établir les données de conditions aux limites en hauteur d'eau qui serviront à forcer le rang 1 présenté précédement.

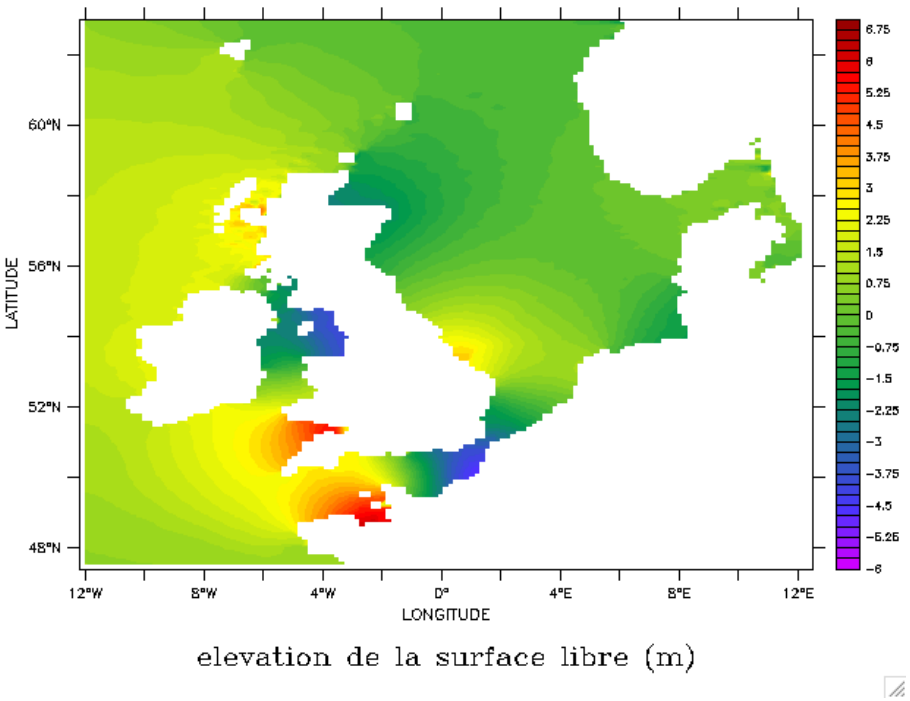


FIG. 1.3 – Elévation de la surface libre dans le rang 0 de la configuration Manche/Mer d'Iroise pour un coefficient de marée de 120.

Cette configuration servira également à tester le nouveau schéma temporel dans une configuration réaliste en deux dimensions. Dans ce cas, nous forcerons le système à ne pas tenir compte des bancs découvrants. Pour cela il suffit de donner une hauteur d'eau minimale pour que le calcule soit réalisé suffisamment élevée

afin que malgré le marnage important aucune cellule calculée ne soit asséchées. Par exemple dans le cas du plus fort coefficient de marée, 120, poser comme hauteur d'eau minimale une hauteur de 10m, suffit à évité les banc découvrants.

Sur la figure 1.3, on a reporté la surface libre pour un instant donné d'une simulation effectuée pour une marée fictive avec un coefficient de marée constant égale à 120. Cela représente le forçage de marée le plus important. Par la suite, on utilisera plusieurs valeurs de coefficient suivant les utilisations de cette configuration.

1.3 Golfe de Gascogne

1.3.1 Introduction

La seconde configuration réaliste est une représentation de la zone du golfe de Gascogne. La zone est comprise en latitude entre 43.2 et 50.8 degré Nord et en longitude entre 8.08 et 3.08 degré Ouest (Fig 1.4). Cette zone est encore un raffinement d'un rang 0 couvrant la zone entre 40 et 65 degré de latitude Nord et 20 degré Ouest et 15 degré Est de longitude.

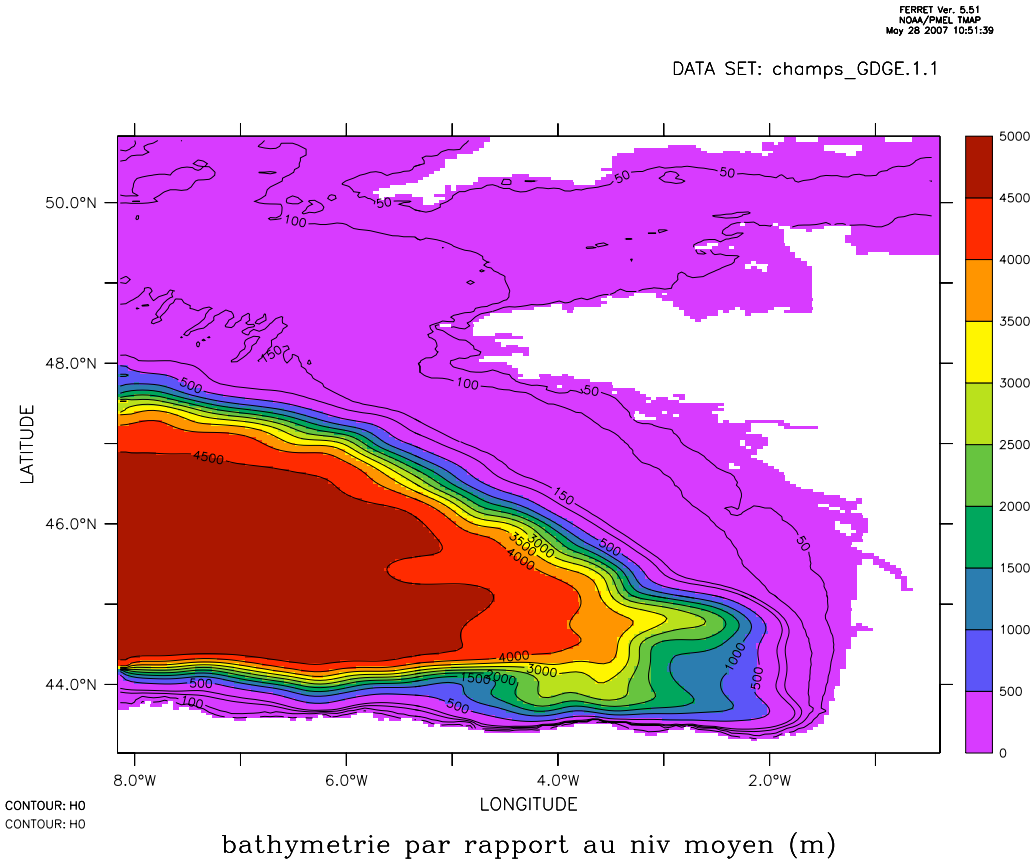


FIG. 1.4 – Emprise et bathymétrie d'un rang 1 de la configuration du golfe de Gascogne.

Cette région comporte de nombreux phénomènes océanographiques. En premier lieu, des structures frontales se développent tout le long de l'année. Par exemple, des panaches d'eau douce issue des rejets des fleuves principaux de la façade Atlantique (Loire, Gironde, Adour, etc...) créent des fronts de salinité qui évoluent en fonction des débits (donc des saisons) et des courants influants sur leur extensions dans le golfe (Fig 1.5).

On observe également des upwellings côtiers, la stratification estivale du au réchauffement peut être

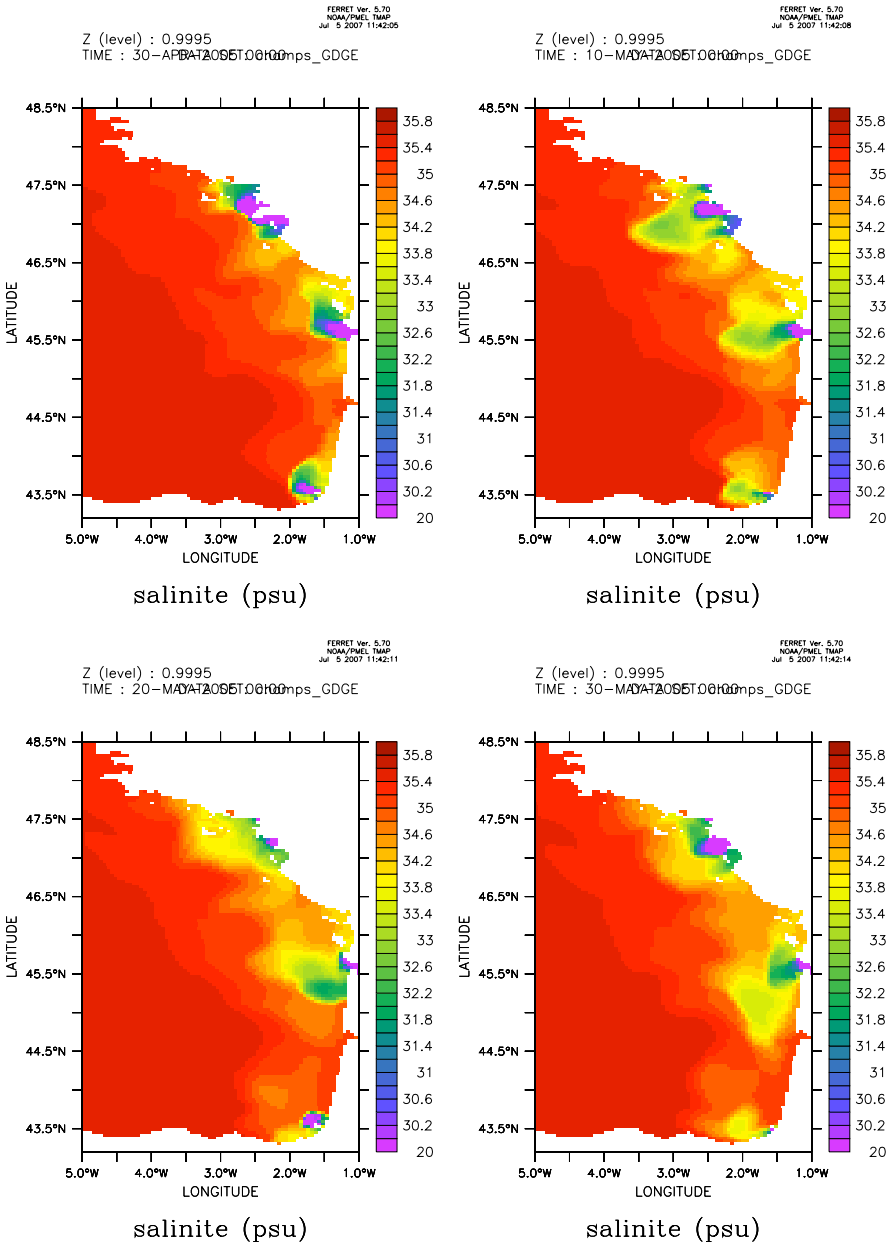


FIG. 1.5 – Panaches fluviaux des principaux fleuves de la façade Atlantique de la France. On remarque nettement les zones liées à la Loire, la Garonne ainsi que l'Adour.

modifiée dans le cas de coup de vent de nord/nord-est faisant remonter de l'eau plus froide des couches de fond. Ces structures dépendent des conditions de vent et donc ne sont pas toujours observables. Ces zones de résurgeance des eaux de fond, ont un impact important sur l'économie. Riches en nutriments, elles produisent un environement favorable au dévelopement du plancton et influent de manière significative sur l'ensemble de la chaine alimentaire halieute favorisant ainsi les pêcheries. On les trouve tout le long de la côte espagnole et landaise. Fig 1.6 on remarque l'apparition d'eau froide remontant du fond le long de la côte espagnole. Comme le cas du front d'Ouessant, la représentation de ces structures frontales est soumise aux performances des schémas d'advection des traceurs.

Les bourelets d'eau froide sont un autre type de structure frontale observable dans la région. Ces bourelets sont des masses d'eau froide piégées au fond sur le plateau continentale qui on pour particularité de conserver la même température toute l'année. On trouve ces masses d'eau dans les zones où la marée n'a pas beaucoup d'influence. Donc les faibles courants de marée permettent l'établissement de la thermocline estivale, isolant d'autant plus la masse d'eau froide des échanges thermiques de la surface, limitant du même coup le réchauffement dans les couches de fond. La Fig 1.7 représente la température en coupe verticale à 47.1 degré nord. On distingue parfaitement le bourelet froid au sud de la Bretagne. Ce bourelet particulier s'étend de la pointe de Penmarc'h à la Gironde. Il est situé dans une zone communement apellée la "Grande Vasière". Ce type de structure n'est pas aussi facilement observable en hiver du fait du refroidissement des eaux de surface et de fond, homogénéisant alors plus ou moins la colonne d'eau.

Un autre point d'intêret majeur de cette région est la présence du talus dans la bathymetrie (le talus est la zone de forte dénivélation du fond de l'océan qui fait la transition entre le plateau continental, compris entre 0 et 200m de profondeur, et la plaine abysale dont la profondeur se trouve en moyenne autour de 3800m). Sur ce talus, plusieurs phénomènes sont observables, comme par exemple une activité saisonière du courant de sub-surface (50-150m de profondeur) en direction du pôle. On nomme cette circulation le courant de pente ou encore Navidad. Ce courant circule le long de la côte ibérique et poursuit son chemin vers le nord en suivant la côte landaise puis le talus continentale. Sa présence a des implications très importantes entre autre en rapport avec la production primaire (planctonique). En effet, si en hiver ce courant transporte de l'eau chaude vers l'intérieur du golfe de Gascogne, en été, dans la période d'upwelling, une anomalie négative de température lui est alors associée. La dynamique de ce courant est peu décrite dans la litérature, néanmoins il en ressort que 3 processus en sont à l'origine. Le vent, l'effet JEBAR (Joint Effect of Baroclinicity And Relief) et la tension topographique sont avancés systématiquement comme responsables du Navidad. Cependant, pour le momment, aucune information n'est disponible sur la dynamique de création du courant par les trois forçages, ni même si on observe le résultat d'une action conjointe ou concurrente de ces derniers. Dans MARS, le courant de pente semble être correctement représenté en hiver et au printemps. Par contre en été et en automne, l'intensité du courant est plus fort dans le modèle voir même de sens opposé (1.8).

La présence de ce courant est également responsable d'une part de la variabilité méso-échelle dans le golfe de Gascogne. A cause de sa localisation sur une zone de forte variation topographique, on peut observer la formation de tourbillons anticycloniques dénommés swoddies (pour Slope Water Oceanic eDDIES). Ces swoddies enferment de l'eau plus chaude que les eaux environnantes (de 0.5 à 0.8 degré de plus) et également en mouvement plus rapide (jusqu'à 3 $m.s^{-1}$). Sur la verticale, il est possible de trouver leur signature jusqu'à des profondeurs de 1500m. Leur temps de vie va de quelques mois à l'année. En général, ces tourbillons se déplacent d'est en ouest, sous l'action du courant moyen et de la conservation de vorticité. Mais certains d'entre-eux restent bloqués par la topographie en particulier dans la zone du Cap Breton dans le sud-est du golfe de Gascogne (zone où le plateau continental est quasiment inexistant avec un talus très abrupte et où l'on note la présence d'un canyon très encaissé).

Cette région du talus est également une zone de problème plus important. Dans le cas de l'utilisation directe des données de bathymétrie, le modèle génère des courants anormaux sur le talus. Ces anomalies se présentent sous la forme de courants forts (irréalistes) dans la couche proche du fond, parfois même avec des signes opposés dans certain cas sur deux mailles consécutives. Ce problème a été résolu en lissant la bathymetrie de façon drastique au voisinage et sur le talus. Il est possible que ce phénomène soit lié à la difficulté, pour la méthode de la dicrétisation verticale en sigma, de représenter les forts gradients de topographie.

Un autre probléme observable sur la Fig. 1.8, est l'effet de bord visible sur la frontière Ouest du domaine. Aucune hypothèse n'est avancée pour le moment.

Pour finir, Pascal Lazure a soumis un problème qui fut observé dans cette configuration au niveau de la non convergence du 3D vers le 2D. Ce problème est apparement purement numérique et assez rare. Il se traduit par une explosion de la solution sans pour autant que l'incrément temporel ne soit au préalable diminué. Le système de séparation des modes internes et externe de MARS exigent une convergence de la

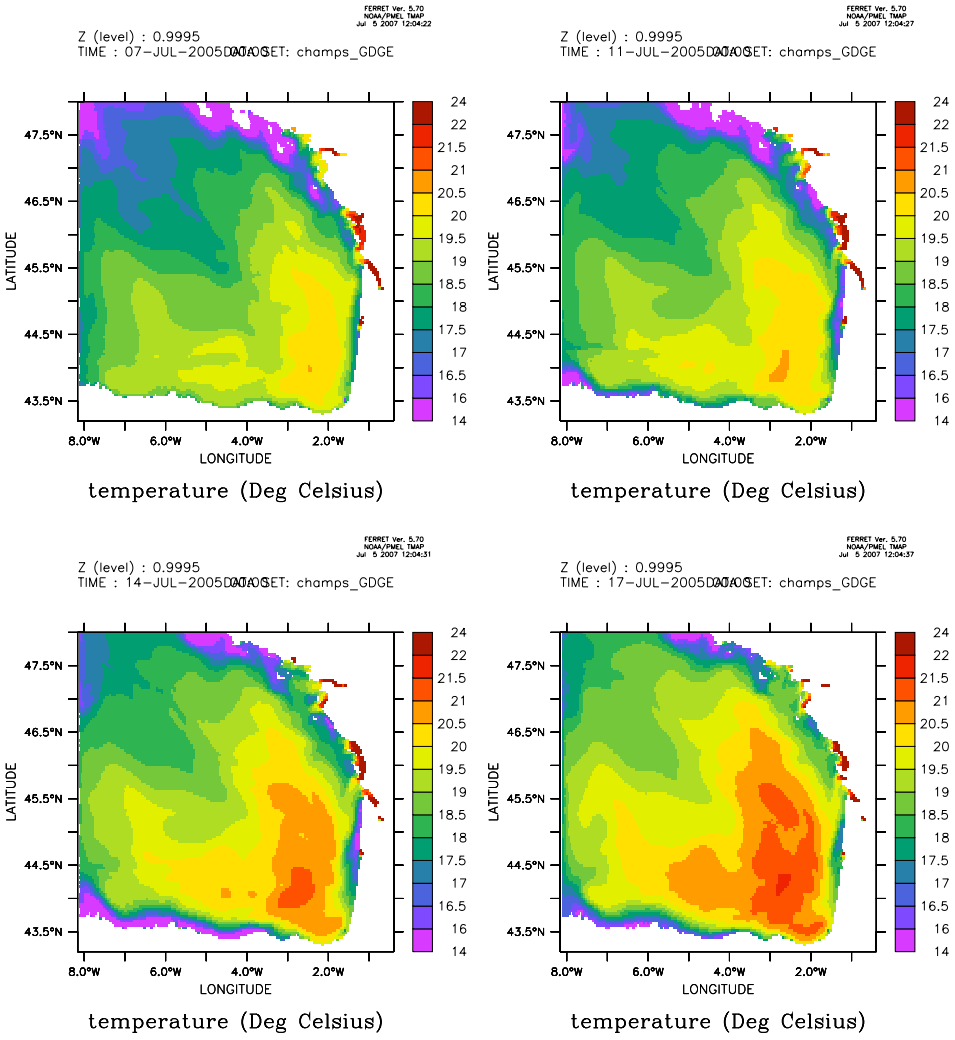


FIG. 1.6 – Upwelling le long de la côte Espagnole.

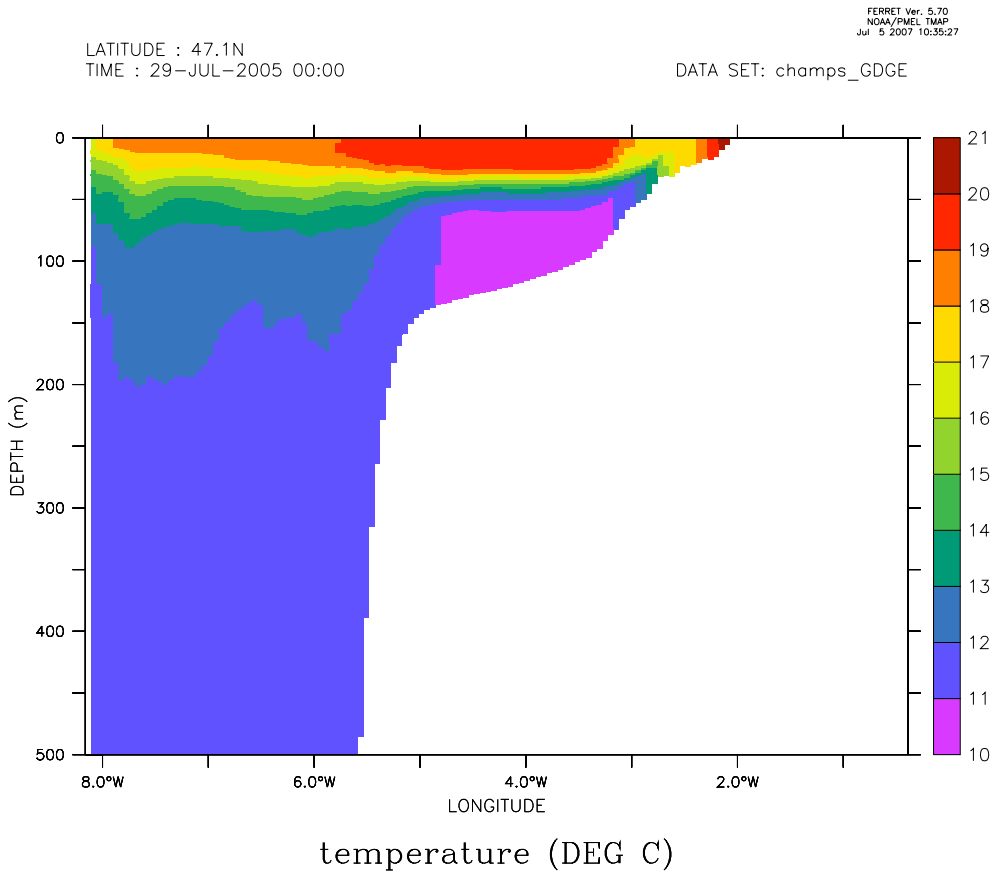


FIG. 1.7 – Bourelet d'eau froide dans la zone de la "Grande Vasière".

somme des modes baroclines vers le mode barotrope. Pour cela le système de prédicteur/correcteur utilise le calcul des composantes baroclines calculées en premier lieu pour évaluer une nouvelle solution. Le calcul se poursuit jusqu'à ce que le critère de convergence soit respecté entres les modes baroclines et le mode barotrope. Il faudrait alors pour éviter ce cas, mettre en place un test déconnectant les termes non-linéaires responsables de la non-convergence, passant alors le code dans un cas linéaire qui stabiliserait certainement la solution.

1.3.2 Conditions initiales et données météorologiques

Tout comme pour la configuration de la Mer d'Iroise, les runs sont realisés à l'aide de conditions initiales homogènes en température et salinité, avec un océan au repos.

Le rang 0 est forcé à l'aide de données météorologiques provenant des données ARPEGE sur la période du 1er janvier au 31 décembre 2005. La couverture spatiale a une résolution d'un demi degré et les données sont fournies toutes les heures. Les grandeurs physiques sont légérement différentes de celles des données WRF.

Les grandeurs physiques sont :

- Le vent à 10 mètres de la surface($m.s^{-1}$) ;
- l'humidité relative (%) ;
- la pression atmosphérique (Pa) ;
- la température de l'atmosphère à 2m de la surface ;
- La fraction de couverture nuageuse (%).

Comme pour la configuration de la Mer d'Iroise, le cas du golfe de Gascogne fonctionne de la même manière. A savoir que le rang 0 est calculé pour un océan dit homogène, soit en 2D. Ici aussi, on tient

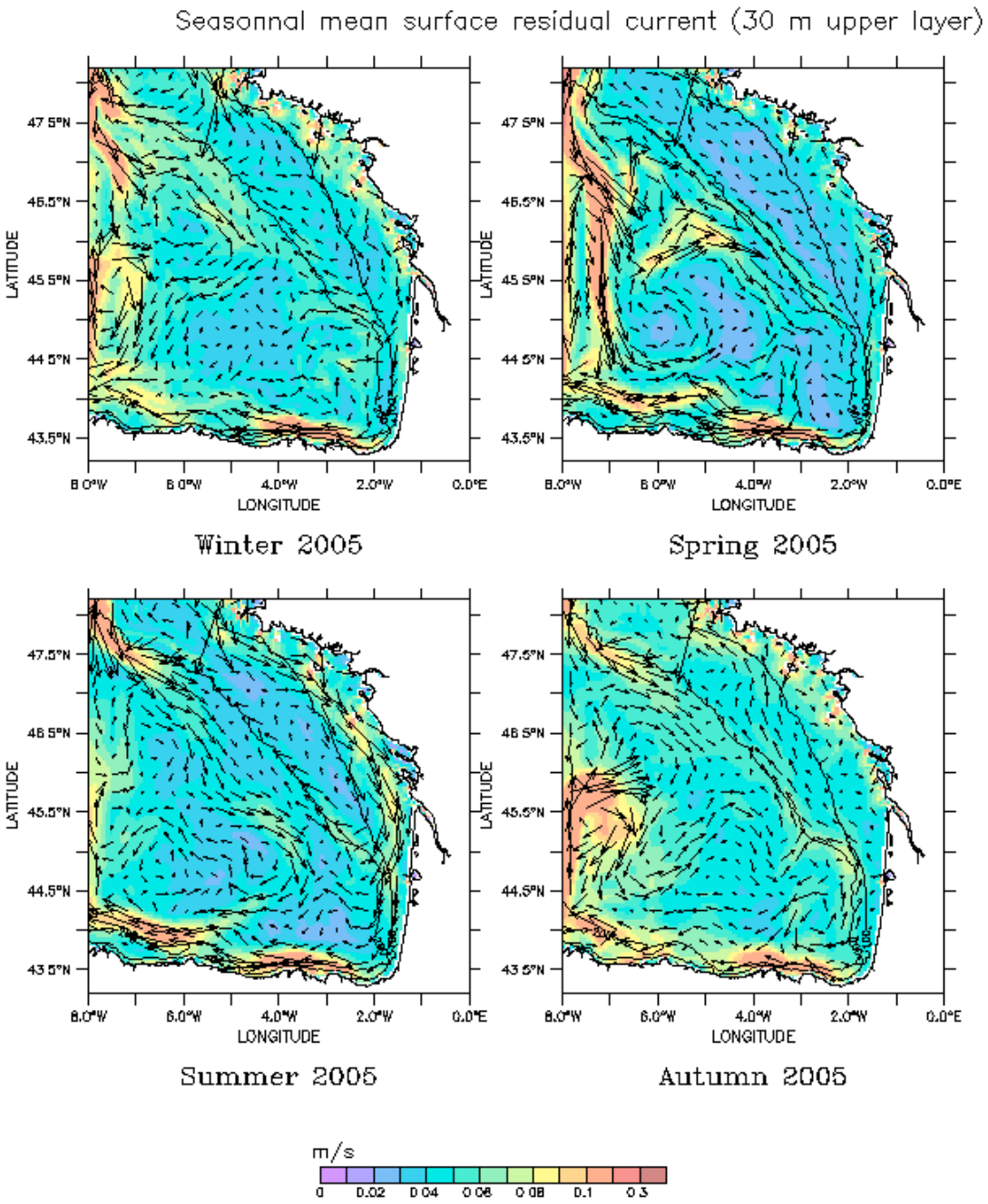


FIG. 1.8 – Moyenne saisonnière des courants de la couche de surface (0-30m) pour les périodes hiver, printemps, été et automne. La zone représente le rang 1 de la configuration. Images fournies par Marina Chifflet.

compte de la marée et de la pression atmosphérique. La marée est générée à partir des constantes harmoniques fournies par l'atlas fes2004.

Pour le rang 1, le calcul est réalisé en 3 dimensions. A l'aide du rang 0, on établit, en terme de hauteurs d'eau, les conditions aux limites du domaine pour les simulations du rang 1. La condition initiale en température, salinité et courant est fournie par la climatologie de Reynaud (Reynaud *et al.*, 1998) établie lors de la campagne WOCE (World Ocean Circulation Experiement). Cette climatologie sert aussi de conditions aux limites aux frontières ouvertes du domaine (principalement à l'ouest). Les valeurs de température, salinité et du courant sont alors imposées à la frontière du domaine.

Les rejets des fleuves, uniquement présents dans le rang 1, sont issus également d'une climatologie.

1.4 Méditérannée : golfe du Lion

1.4.1 Introduction

La troisième configuration réaliste est située au niveau du nord de la Méditerranée Occidentale. Cette zone géographique comprise entre les longitutes 3 et 7.2 degré est et les latitudes 42 et 43.6 degré nord, est une région où la bathymétrie présente un large plateau continental (le plus grand de la mer Méditerranée) de profondeur moyenne de 90m (Fig. 1.9). S'étendant du Cap Béar à Toulon, il est délimité par un talus entrecoupé de nombreux canyons. Cette zone, le golfe du Lion, est bordée par la mer Ligure au Nord-est, la mer Catalane au sud-ouest et du bassin Algérien au sud. La particularité bathymétrique de la zone, avec son plateau et son talus continental, joue un rôle majeur dans l'hydrodynamique du gofle du Lion et dans les échanges entre la côte et le large. La circulation océanique est gouvernée par la densité issue du mélange des diverses masses d'eau ainsi que par les forçages atmosphériques (vent, échange de chaleur) et la circulation générale (courant nord s'écoulant de la mer Ligure jusqu'aux côtes Catalanes).

C'est une des régions les plus ventées de la Méditerranée. Les vents dominants de la région sont le Mistral et la Tramontane. Le Mistral souffle du nord le long de l'axe du Rhône. Il présente une variablité bien documentée avec des vitesses maximales de l'ordre de 10 à 15 $m.s^{-1}$ en été et souffle avec une fréquence de 1 jour sur 3 en moyenne. L'intensité des coups de vent évolue de manière très brutale. La Tramontane quand à elle souffle dans l'axe délimité par le massif central et les Pyrénées, appelé le seuil de Naurouze. Vent de nord-ouest, la Tramontane présente une variabilité comparable à celle du Mistral, mis à par une fréquence légérement supérieure. Pendant la saison d'hiver, l'intesité de ces vents est plus forte. Liés à la présence de masse d'air froid, ils peuvent s'établir et souffler pendant plusieurs semaines, occasionnant ainsi d'importants flux de chaleur sur la zone, favorisant la formation d'eau profonde. La marée en Méditerranée étant très faible, elle n'induit pas autant de processus de mélange comme rencontré dans la mer d'Iroise. Ici, le mélange des masses d'eau se fait principalement sous l'action du vent.

Sous l'action du vent via une couche d'Ekman, le Mistral et la Tramontane participent à l'établissement de la circulation dans le golfe. Selon la direction du vent, on observera une circulation tantôt cyclonique tantôt anti-cyclonique (Estrounel *et al.*, 2003). En effet, un vent de Nord comme le Mistral favorisera la mise en place d'une circulation anticyclonique. La Tramontane soufflant du nord-ouest, sera responsable d'une circulation cyclonique sur la partie ouest du plateau. De plus, dans le cas où les deux vents soufflent ensemble, une circulation mixte s'établie limitant le tourbillon anticyclonique caractéristique du Mistral à la partie centre-est du golfe du Lion. La partie ouest du plateau sera le territoire du tourbillon cyclonique.

D'autres phénomènes du au vent sont observables dans cette zone. Par exemple des zones d'upwelling et de downwelling sont observables dépendemment des conditions de vent (Millot (1980), Millot *et al.* (1981)). Dans le cas d'un vent de nord-ouest, on pourra remarquer la présence de ces zones de résurgence des eaux de fond dans les régions de la Camargue, de la Provence et du Languedoc (Fig 1.10 et 1.11) alors que la côte du Roussillon présente une zone de downwelling. Ces zones sont très localisées. Sous l'impact de la topographie et de la morphologie de la côte, Hua et Thomasset (1983) ont pu dénombrer 6 zones distinctes. Ces phénomènes de mouvements verticaux des couches océaniques commencent à apparaître quelques heures après le début du coup de vent et peuvent perdurer quelques jours après la chute de ce dernier.

Moins évident à mettre en lumière, les phénomènes inertiels dus au vent sont également présents. Sous conditions de stratification, il est possible d'observer un courant oscillant à la période d'inertie (17.5 heures à cette latitude) ainsi que le mouvement de la thermocline (onde interne). Ces ondes internes sur le plateau sont succeptibles d'être responsables d'une partie du mélange des masses d'eau induit par le vent. Comme les up et downwelling, le phénomène persiste plusieurs jours après le coup de vent.

Enfin en hiver, il est possible d'obtenir de la convection et donc de la formation d'eau profonde dans

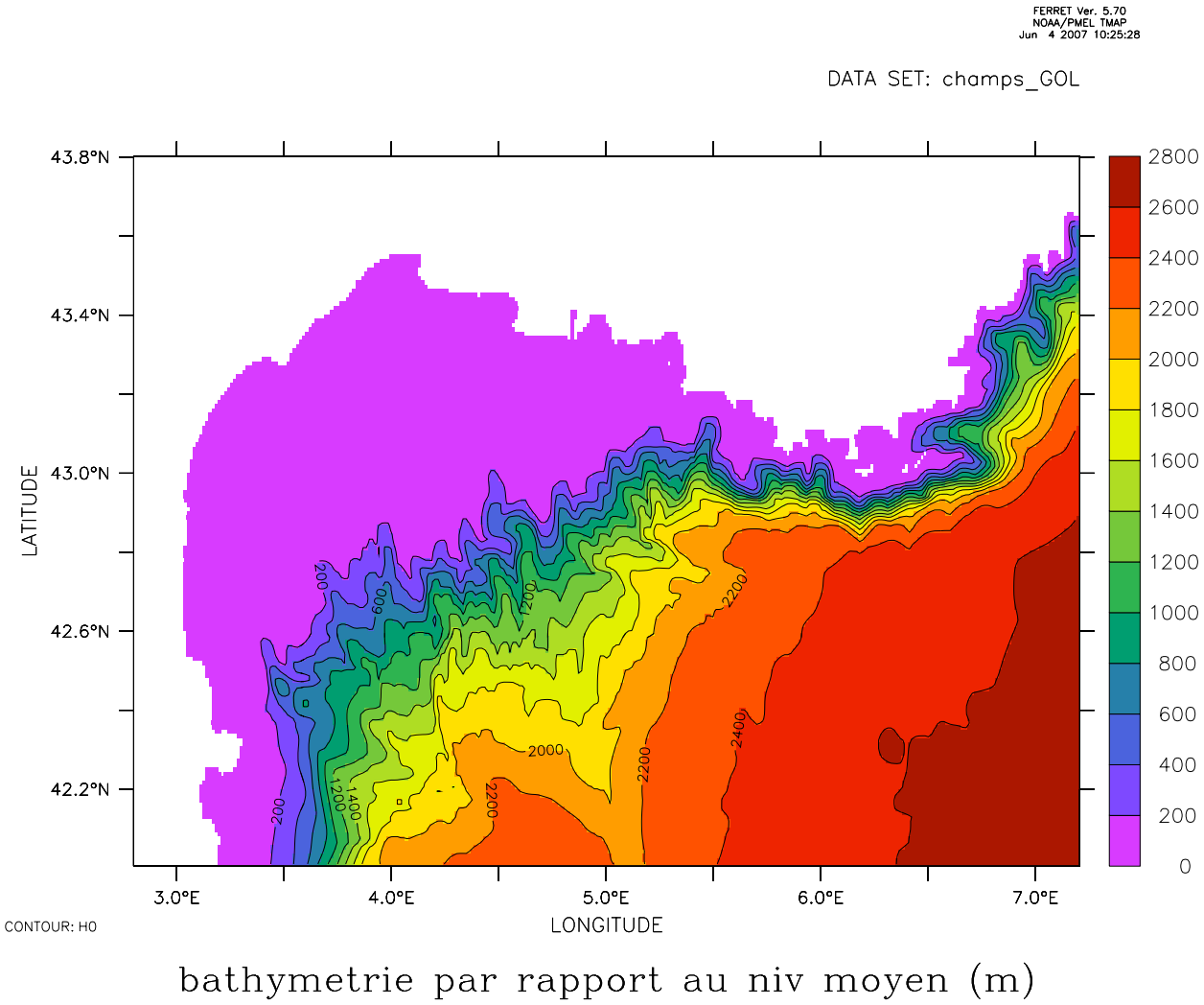


FIG. 1.9 – Emprise et bathymétrie de la configuration du golfe du Lion.

le bassin nord et spécifiquement en mer Ligure. La présence de vent froid et sec soufflant de nord-ouest, peut être la cause d'évaporation. Cela a pour conséquences de densifier les couches de surface entrainant localement la convection des eaux de surface vers le fond. Autour de 42 degré Nord et de 5 degré Est, sur 2 degré en longitude et 1 degré en latitude, on peut observer ce genre de phénomène. On trouve alors des cheminées d'une dizaine de kilomètres de diamètre où l'eau s'écoule entre 800 et 3000 m de profondeur dans une circulation cyclonique. Sous des conditions très particulières de vent, il est possible d'observer de la convection directement sur le plateau continental (Bethoux *et al.*, 2002). Cette eau plonge alors au fond sur le plateau et coule vers le fond le long du talus. On parle ici de "cascading". L'eau se mélange avec les eaux environantes le long de sa descente jusqu'à atteindre un état d'équilibre hydrostatique vers 350m.

Le golfe du Lion en plus d'être le siège de vents les plus intenses de la Méditerranée, est également depuis la construction du barrage d'Assouan, la zone recevant les plus gros apports fluviaux. Le Rhône représente un apport d'eau douce de l'ordre de 1700 $m^3.s^{-1}$ (avec des maximums de plus de 5000 $m^3.s^{-1}$ en crue à l'automne et au printemps). Ce débit ne représente qu'un millième de la circulation générale de la région, mais du fait de l'eau douce qu'il transporte, cela représente un forçage thermodynamique majeur dans le golfe. Ainsi on trouve tout comme dans le golfe de Gascogne des phénomènes de panache fluviaux plus ou moins marqués selon le débit des fleuves. Fig 1.13 on peut observer un de ces événements où le Rhône en crue déverse des quantités d'eau douce dans le golfe au point de changer radicalement la salinité de surface.

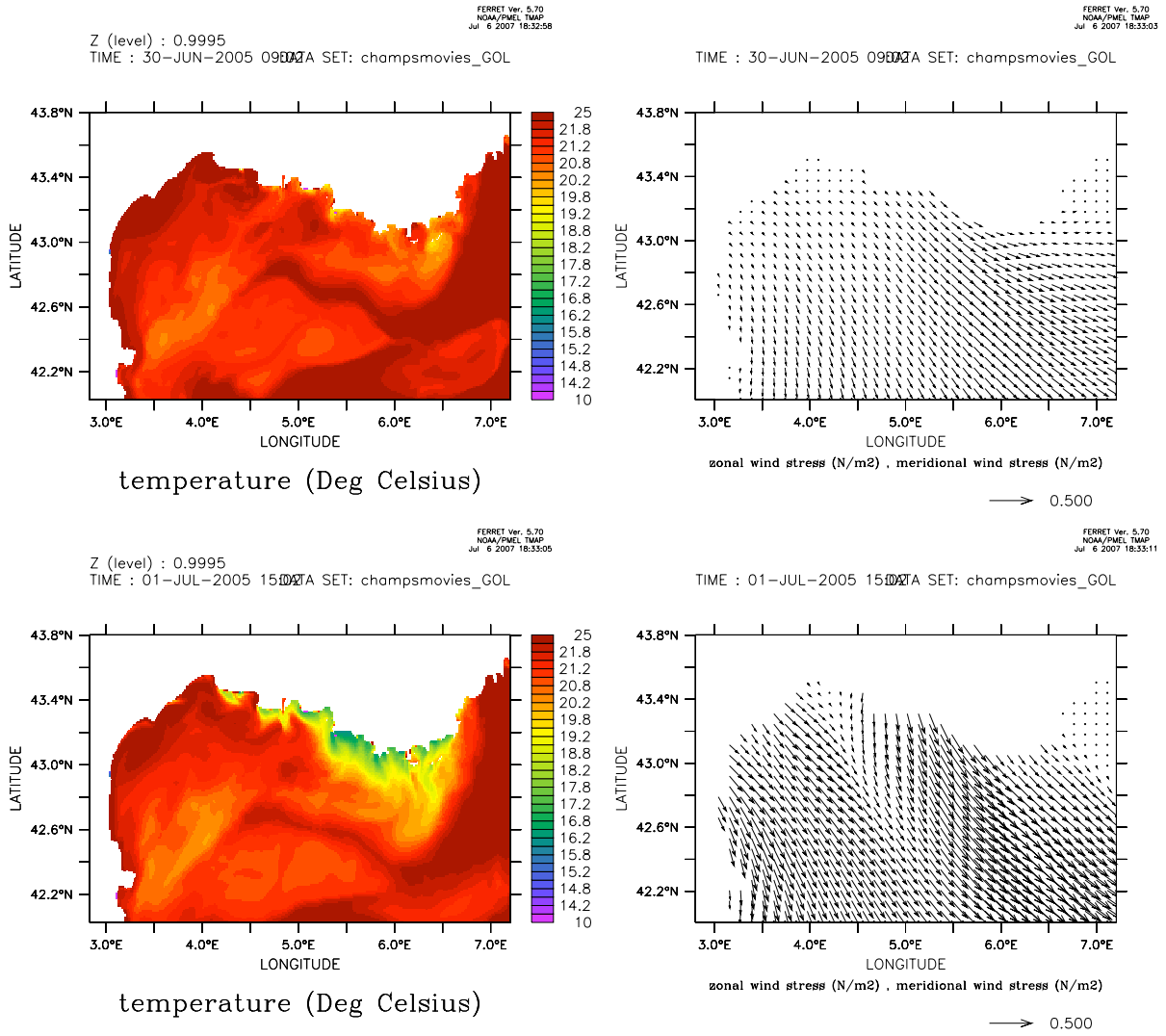


FIG. 1.10 – Période d'upwelling dans le golfe du Lion (a) et (c) représentent la température de surface, (b) et (d) les champs de vent correspondant.

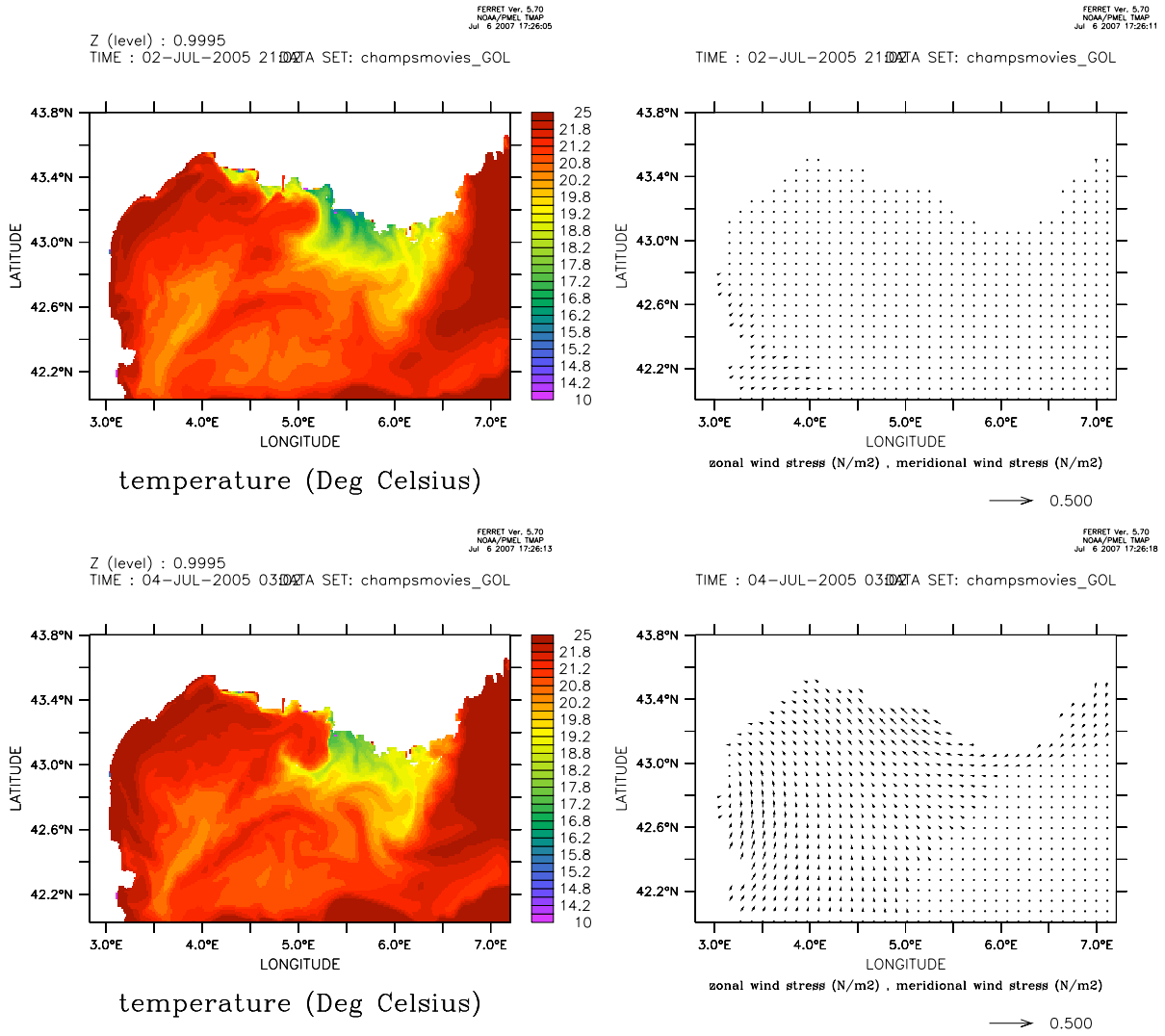


FIG. 1.11 – Période d'upwelling dans le golfe du Lion (a) et (c) représentent la température de surface, (b) et (d) les champs de vent correspondant.

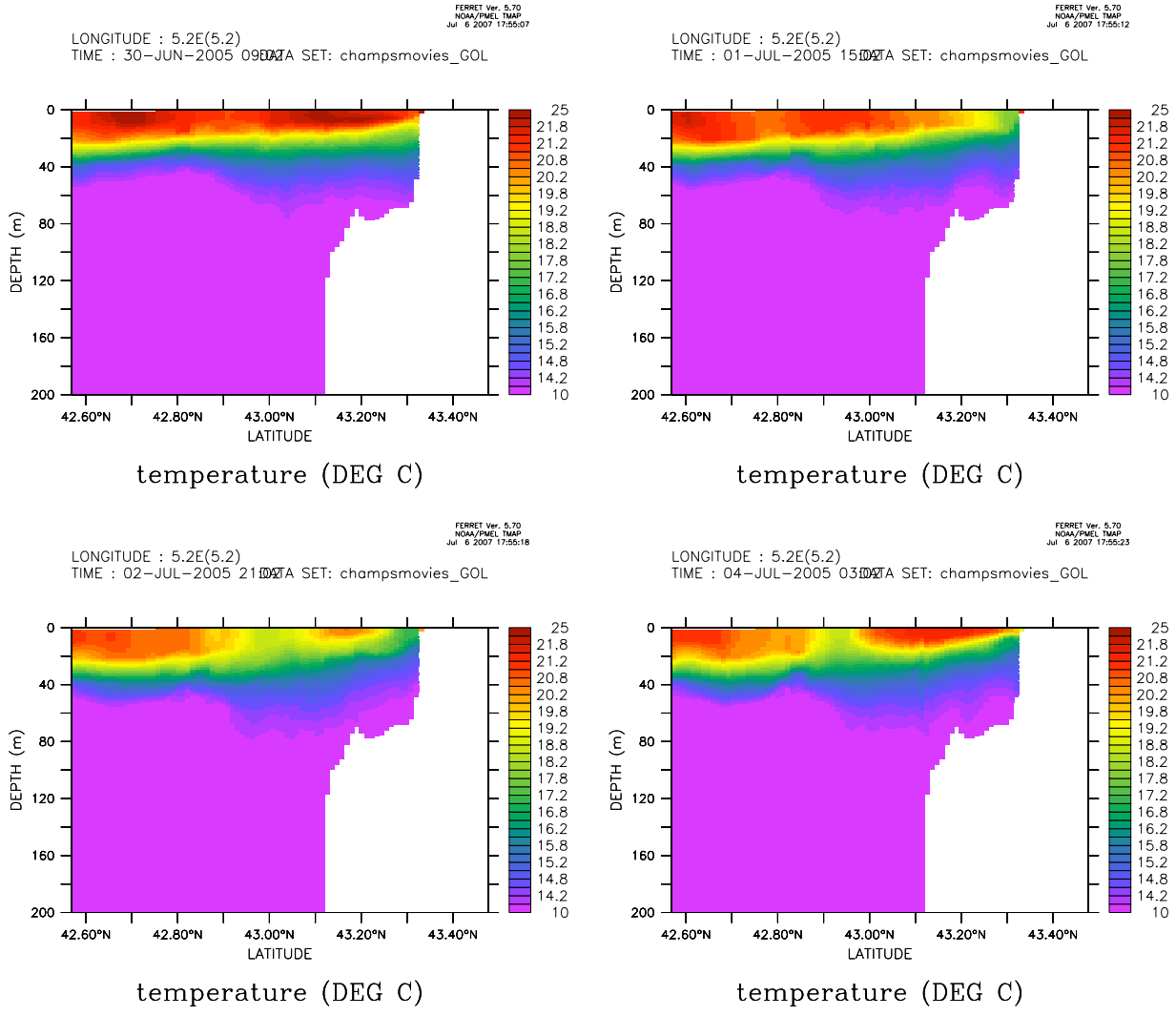


FIG. 1.12 – Période d'upwelling dans le golfe du Lion coupe verticale des 200 premiers mètres pour les dates correspondantes à celle des figures 1.10 et 1.11 à 5.2 degré est.

Evidement, le vent via la couche de mélange finira par réhomogénéiser cette anomalie négative de salinité. La "virgule" sur la fig 1.13 (a) est charactéristique du panache du Rhône. Cependant ce forçage est bien moins dominant que le vent. D'autres fleuves secondaires se jettent dans le golfe comme le Tech, l'Aude, l'Orb ou encore l'Hérault. Mais ils ne représentent qu'une légère modification de la circulation sur le plateau. Sur la fig 1.13, on peut également noter la présence dans le coin Nord-Est du domaine d'un signal de faible salinité. Ce signal marque la présence d'un autre cours d'eau, le Var, qui n'est pas pris en compte dans les forçages prescrits. Ce signal est une conséquence de l'application des conditions aux limites ouvertes du modèle où on rappele les valeurs de température, de salinité et de hauteur d'eau.

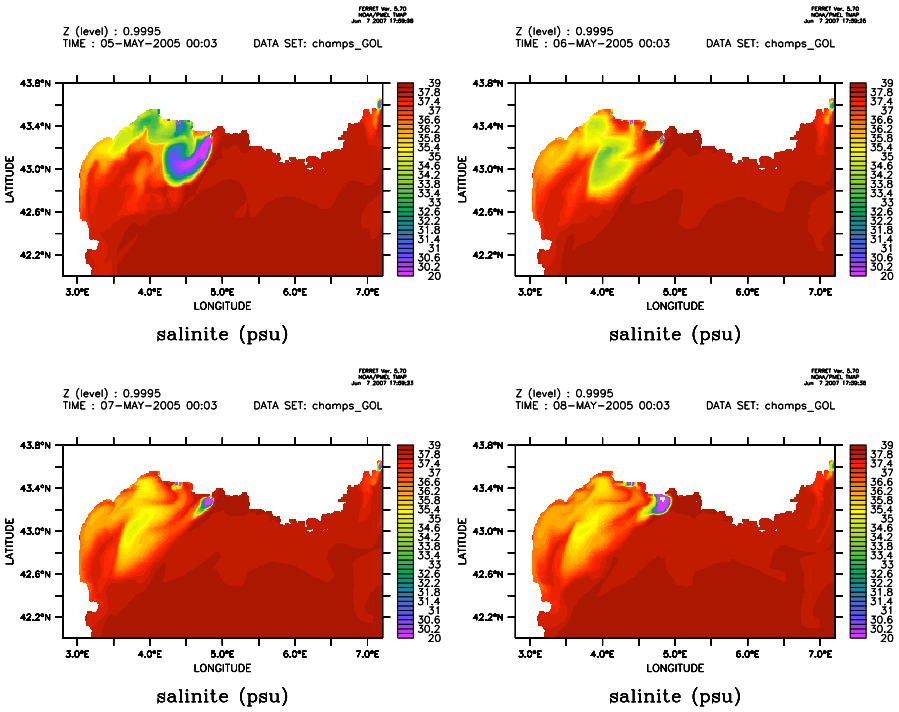


FIG. 1.13 – Panache fluvial du Rhône.

La circulation générale aussi un élément majeur de la circulation au-dessus du plateau. Celle-çi est composée principalement du courant Liguro-Provencal. Ce courant formé par les eaux remontants du golfe de Gênes, s'écoule le long du talus continental depuis la mer du Ligure jusqu'à la mer Catalane. C'est un courant de densité variable en fonction du vent et du climat qui présente une variablité saisonnière avec un débit moyen de l'ordre de 1.6 Sv (1 Sv=10^6 $m^3.s^{-1}$). De Juin à Décembre, sa vitesse varie entre 50 $cm.s^{-1}$ en surface à 10 $cm.s^{-1}$ entre 100 et 200m de profondeur. Il est large (40-50 km) et peu profond (200 m). Dans le cas où la thermocline saisonière est bien établie, le courant est alors confiné à une couche de surface peu profonde lui permettant de s'affranchir de l'influence de la topographie. Alors on observe des incursions de ce dernier sur le plateau du golfe (Echevin *et al.*, 2003). De Janvier à mi-Mars, il devient plus étroit (20-30 km) mais s'approfondit (jusqu'à 500m), on rencontre des vitesses de l'ordre de 5 $cm.s^{-1}$ à 400-500m de profondeur. Sur cette période il est possible d'avoir des vitesses en surface présentant des maximums de l'ordre de 1 $m.s^{-1}$. Dans ce cas il lui est quasiment impossible de se déplacer vers la côte. Le courant est contraint par la présence du talus, à rester au dessus des eaux les plus profondes de la zone. En hiver, la variabilité de ce courant est plus intense. Il présente en effet selon les conditions de vent, des instabilités à l'origine de méandres d'une longueur d'onde de 10 à 100 km et entraine la formation de tourbillons se détachant vers le sud-ouest. Les observations (Flexas *et al.*, 2002) ont montré que deux types d'instabilités peuvent être à l'origine des oscillations du courant du Ligure. Les larges méandres de période de 10 à 40 jours et de 7 jours sont vraissemblablement dus aux instabilités baroclines, alors le développement d'instabilités barotropes serait liée avec une période d'oscillation de l'ordre de 3.5 jours.

1.4.2 Conditions initiales et données météorologiques

Les runs sont realisés à l'aide de conditions initiales issues du système MFS (Mediterranean Forecasting System). Les conditions aux limites ouvertes sont également issues de ce champ de données. On a ici besoin de valeurs sur la frontière Sud et Est du domaine. On a alors accés au niveau de la surface libre, de vitesses, de température et de salinité. La simulation débute le 9 avril 2005 et se poursuit jusqu'au 27 juillet 2005.

On a ici un seul rang. Ce rang est forcé à l'aide de données météorologiques provenant des données MM5 sur la période du 1er mars au 30 juillet 2005. La couverture spatiale a une résolution de 3 km et les données sont fournies toutes les 3 heures. Les grandeurs physiques sont légérement différentes de celles des données WRF.

Les grandeurs physiques sont :
- Le vent à 10 mètres de la surface($m.s^{-1}$) ;
- l'humidité relative (%) ;
- la pression atmosphérique (Pa) ;
- la température de l'atmosphère à 2m de la surface ;
- la précipitation ;
- la radiation incident à la surface.

La marée est générée à partir des constantes harmoniques fournies par l'atlas fes2004.

Les rejets des fleuves sont donnés uniquement pour le Rhône. On a alors la contribution du petit et du grand Rhône. Le petit Rhône ne représente que 10 % du total.

1.5 Région des Charentes-Maritimes

1.5.1 Introduction

Cette configuration est une zone de raffinement du rang 1 de la configuration du golfe de Gascogne en deux dimensions. A partir de celle-ci, on réalise 2 emboitements successifs centrés sur l'ile d'Oléron. La zone de plus haute résolution (rang 3) s'étant alors de 45.72 à 46.13 degré de latitude nord et de 0.978 à 1.519 degré de longitude ouest, avec un pas de grille de 100m. Toute la simulation est faite en deux dimensions.

La particularité de cette zone réside dans les larges zones découvrantes avec la marée. C'est donc dans l'objectif de tester le mécanisme de traitement des bancs découvrants que cette configuration est mise en place. Fig 1.14, on peut voir la bathymétrie de la zone autour du niveau moyen. La zone blanche montre la partie terrestre de la zone qui ne sera jamais recouverte par la marée. Dans la simulation, les fonds compris entre +10m et -10m sont suceptibles d'être à sec ou mouillés selon l'intensité de la marée (le zéro de la carte ne représente en aucun cas le zéro des cartes bathymétriques du SHOM, mais plus ou moins le niveau de l'eau à mi-marée).

La zone est donc peu profonde, avec une profondeur maximum de 45m au dessous du niveau moyen.

1.5.2 Conditions initiales et données météorologiques

Pour simplifier au maximum, la seule condition aux limites appliquée concerne le niveau de l'eau sur les bords ouverts de l'emprise. Le calcul étant en deux dimensions, les valeurs de température et de salinité ne sont pas rappelées. Elles sont simplement initialisées de façon homogène sur la région. De plus on ne tient pas non plus compte de la présence des fleuves qui se déversent dans cette zone.

Toutes ces restrictions sont réalisées afin de ne tenir compte que du mouvement du à la marée pour tester le schéma de banc découvrant.

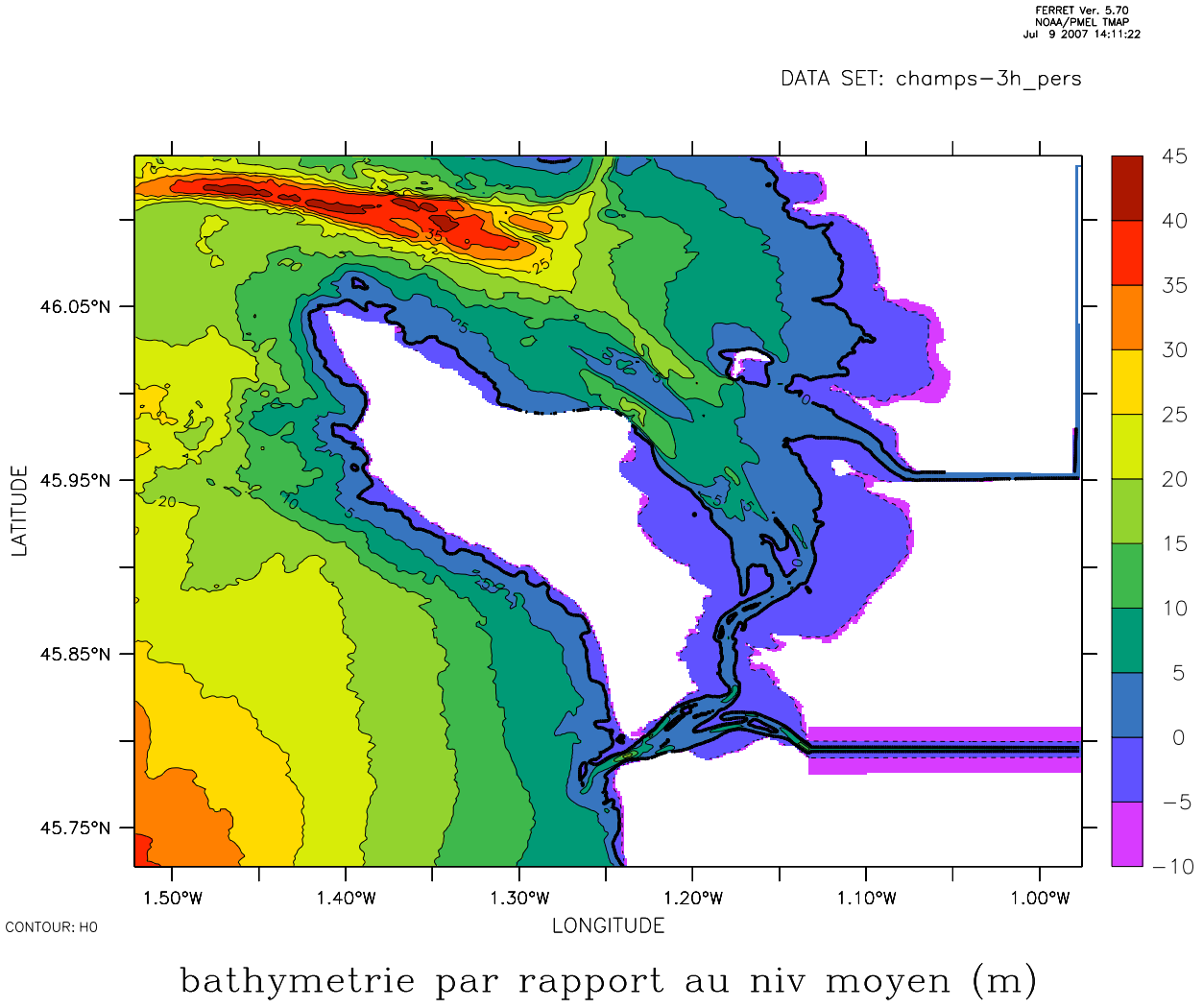


FIG. 1.14 – Emprise et bathymétrie du rang 3 de la configuration de l'ile d'Oléron.

Chapitre 2

Description et configuration des cas test

Sommaire

2.1 Introduction 31
2.2 Vortex Barocline 32
2.2.1 Introduction 32
2.2.2 Conditions initiales 32
2.2.3 Paramètrage de la configuration 33
2.2.4 Champs d'initialisation 34
2.2.5 Run de référence 34
2.3 Vortex Barotrope 36
2.3.1 Introduction 36
2.3.2 Conditions initiales 36
2.3.3 Paramètrage de la configuration 40
2.3.4 Champs d'initialisation et Run de référence. 40
2.4 Jet Barotrope 43
2.4.1 Introduction 43
2.4.2 Conditions initiales 45
2.4.3 Paramètrage de la configuration 46
2.4.4 Champs d'initialisation et Run de référence 46
2.4.5 remarque finale sur le courant barotrope 51
2.5 Smolarkiewicz 53
2.5.1 Introduction 53
2.5.2 Conditions initiales 53

2.1 Introduction

La mise en place de cas test, tout comme les configurations réalistes, est réalisée dans le but de tester les modifications qui seront apportées au modèle comme les différents schémas d'advection qui seront intégrés prochainement. MARS posséde déjà une logitèque de cas test utilisés pour le développement du code.

On dénombre 10 différentes configurations idéalisées :

- un système de banc découvrant,
- la présence d'une montagne soumarine,
- un système à deux couches de densité différentes qui s'ajustent avec la gravité,
- un cas de cylindre dessalée (cas test décrit par Tartinville *et al.* (1998)),
- un test d'évaporation,
- un test de circulation dans un canal périodique,
- un upwelling,
- et un downwelling,
- la propagation d'une onde de Kelvin,
- enfin un cas test de profil pour tester le schéma de turbulence vertical sur un cycle de marée fictif.

Chacun de ces cas test permet de tester les différentes fonctionnalités du modèle. A chaque changement de version, ils sont passés en revue afin de voir si les dernières modifications ne changent pas la solution des problèmes déjà résolus, ou du moins que les changements, si il y en a, restent cohérents avec la physique.

Ici, le but est de distinguer les performances de nouveaux schémas temporels, de plusieurs schémas numériques d'advection des traceurs passifs et de la formulation en flux de la conservation de la quantité de mouvement. Dans MARS, on va intégrer plusieurs schémas et comparer leurs résultats entre-eux et par rapport à ceux déjà en place dans le modèle. Il est alors décidé pour cette tâche de mettre en place plusieurs nouveaux cas test :

- un vortex barocline en équilibre géostrophique,
- un vortex barotrope en équilibre cyclo-géostrophique,
- un courant zonal barocline instable dans un canal périodique zonal,
- un courant zonal barotrope instable dans un canal périodique.

2.2 Vortex Barocline

2.2.1 Introduction

Ce cas test est une reproduction de la configuration d'un vortex barocline en équilibre géostrophique décrit dans l'article de Spall et Holland (1991). Ce vortex a également été décrit de manière plus détaillée par Pierrick Penven (Penven *et al.*, 2006).

Ce cas test a été implémenté dans MARS3D. On peut trouver les fichiers correspondants dans les repertoires /$UDIR/Vortex/Vortex-V6-14/ et /$RDIR/Vortex/Vortex-V6-14/. Les fichiers importants sont Vortex.F90, equeta_lin.F90. D'autres ficiers sont potentiellement utiles : Temp.nc, Zeta.nc, Ubar.nc, Vbar.nc, Uz.nc et Vz.nc. Ces derniers fichiers au format NetCDF ont été générés par les routines Matlab, fournies par Pierrick Penven, qui lui ont servi à initialiser ROMS pour ces simulations numériques. Il reste que ces fichiers NetCDF ne sont pas essentiels car il est possible d'initialiser le cas test directement en calculant les champs de vitesses, de surface libre et de température.

2.2.2 Conditions initiales

La simulation est un problème aux conditions initiales. Le modèle est initialisé par des champs de température, de surface libre et de vitesses. Puis MARS3D évolue sans aucun forcage (ni dissipation théoriquement car en pratique on conserve un peu de dissipation afin de stabiliser la solution numérique). Un run avec absolument aucune viscosité ou dissipation (autre que numérique) a été mis en place. Le résultat est que la solution est stable pendant plus de 67 jours et présente toutes les caractéristiques décrites par Pierrick Penven. Mais cette simulation finit par exploser (fig 2.1). Alors pour la suite nous avons décidé de conserver une légère dissipation (de l'ordre de 1 $m^2.s^{-1}$) pour des pas de temps grand (960s).

Ce vortex consiste en une variation (élévation dans le cas d'un anti-cyclone et diminution dans le cas d'un vortex cyclonique) gaussienne de la pression à la surface en équilibre avec un champ de vitesses géostrophiques. Cette variation de pression est représentative d'une variation de température au sein de la structure tourbillonnaire.

La pression à la surface est alors sous la forme :

$$P(z=0) = P_0 e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}} \tag{2.1}$$

où P_0 est défini par la maximum de la vitesse géostrophique : $P_0 = \rho_o f_o u_{max} \sigma \sqrt{e}$, x et y sont les coordonnées par rapport au centre du tourbillon et σ la largeur du signal gaussien à mi-hauteur.

Il faut porter une attention particulière à la valeur de u_{max}. En effet, si cette valeur est positive le tourbillon sera anti-cyclonique. Le signe opposé donnera un tourbillon cyclonique.

L'expérience décrit le cas d'une structure barocline en présence d'une stratification telle que l'on force le système au repos dans les couches de fond au-delà d'une profondeur H_1.

La pression est alors décrite de la façon suivante :

$$P = P_0 \frac{H_1 - 1 + z + e^{-(z+H_1)}}{H_1 - 1 + e^{-H_1}} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}} \tag{2.2}$$

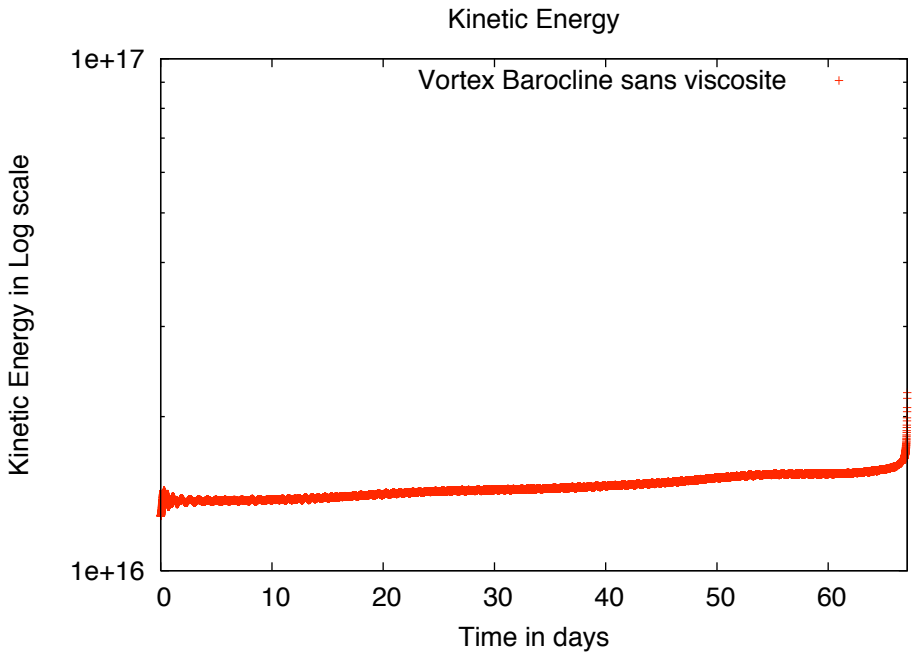


FIG. 2.1 – Energie cinétique de la simulation sans viscosité. L'énergie est donnée en échelle logarithmique

Ainsi la densité est donnée par la somme d'une stratification ambiante linéaire et d'une anomalie de densité caractéristique de la structure tourbillonaire. Soit avec la condition de non-mouvement au dessous de H_1 :

$$\begin{aligned} \rho = \rho_o - \frac{\rho_o N^2}{g} z - \frac{P_0}{g} \frac{1-e^{-(z+H_1)}}{H_1 - 1 + e^{-H_1}} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}, \text{ pour} z > -H_1 \\ \rho = \rho_o - \frac{\rho_o N^2}{g} z, \text{ pour} z \leq -H_1 \end{aligned} \tag{2.3}$$

avec N la fréquence de Brunt-Väisälä ($N^2 = \frac{g(\rho_0 - \rho)}{\rho_0}$) et g la gravité. La densité est liée à la température de manière linéaire par la simple relation : $\rho = 1030 - 0.28T$.

La surface libre, η, est alors déduite du champ de pression à la surface :

$$\eta \simeq \frac{P_0 e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}}{\rho(z=0)g} \tag{2.4}$$

Pour le run de référence, on prend les valeurs de constante suivantes : $P_0 = 9127.4Pa$, $\sigma = 60km$ et $H1 = 2500m$ pour un océan de 5km de profondeur.

2.2.3 Paramètrage de la configuration

Pour ce cas test, on se place dans le cas d'un plan-β centré autour de 38,5 degré de latitude Nord. On se place sur une grille cartésienne de 10km avec un pas de temps de 960 secondes.

On utilise alors les paramètres suivants :

Dans le fichier parametres.F90_Vortex

- $jmin = 0$;
- $imin = 0$;
- $jmax = 182$;
- $imax = 182$;
- $kmax = 10$.

Les autres valeurs de paramètres, comme par exemple *cfi* qui est le coefficient d'implicitation pour le terme de frottement au fond, sont laissées identiques à celle du premier cas test de MARS ; le cylindre dessallé décrit dans l'article de Tartinville (Tartinville *et al.*, 1998). C'est à dire que l'on va rester dans des conditions standards d'utilisation du modèle.

Le détail des paramètres se trouve dans les annexes.

2.2.4 Champs d'initialisation

Pour l'initialisation du vortex, on utilise les champs décrits par les équations précédentes. Les différents champs sont représentés dans les figures 2.7, 2.5 et 2.4.

Les deux premières figures représentent les champs horizontaux de l'élévation de la surface libre et de la température de surface. Tandis que la figure 2.4 est une coupe verticale le long de l'axe méridien coupant le vortex en son milieu représentant le champ de température et la vitesse zonale en fonction de la profondeur.

2.2.5 Run de référence

Tout comme dans l'article de (Penven *et al.*, 2006) et (Spall and Holland, 1991), on observe une propagation du vortex cyclonique vers le sud-ouest (fig 2.5 et 2.7). Dans le cas d'un anticyclone, une propagation vers le nord-ouest est observée.

Cependant on peut voir que la vitesse de déplacement du vortex est plus lente dans notre simulation que dans celle de Penven (Fig 2.5). Dans leur simulation le déplacement au bout de 100 jours est d'environ 600 km alors que dans la présente simulation il n'est à peine que de 300 km pour 72 jours. Ce qui donne une vitesse moyenne de déplacement de 6 km par jours pour le cas de Penven et 4.2 km par jour dans notre simulation. De plus la progression du vortex n'est pas linéaire. On observe un déplacement rapide vers le sud-ouest dans les premiers 50 jours de la simulation. Puis le déplacement de la structure est plus orienté vers le sud.

Le déplacement plus lent est lié à un artéfact numérique. En effet, si on diminue le pas de temps d'intégration jusqu'à 50 secondes (au lieu de 960 pour le run de référence) on s'aperçoit que le déplacement est conforme aux observations de Penven. Sur la figure 2.6, le champ de fond représente le champ de température du run de référence alors que les isocontours de température sont ceux du run avec $dt = 50$ le tout pour 99 jours de simulation. Ce dernier présente le même déplacement que dans l'article de Penven. De plus le champ de température est quasiment identique à 0.05 degré celsius près. La raison de ces différences est que le schéma de MARS est trés disperssif pour des grandes valeurs de pas de temps. Les ondes courtes sont alors ralenties numériquement par le schéma temporel. Ce phénomène s'atténue en diminuant le pas de temps. Cependant il n'est pas envisageable de faire tourner MARS avec des pas de temps petits, cela serait extrémement coûteux en temps de calcul. Dans la suite des travaux réalisés sur le modèle, nous tenterons d'apporter des solutions pour améliorer les performances à ce sujet.

Sur la figure 2.5, on peut néanmoins voir que l'évolution globale de la structure tourbillonaire est conforme aux observations de Penven. La valeur du maximum diminue avec le temps sous l'action de la diffusion horizontale. Et, à la différence de Spall et Holland, on a toujours la signature de la structure dans les champs de surface libre. La présence de l'onde barotrope est aussi à signaler. Certes notre champ est fortement bruité autour de la valeur nulle pour l'élévation de la surface libre. Ce bruit est vraisemblablement lié aux observations précédentes sur le caractère disperssif du schéma temporel du modèle. Néanmoins il est possible de distinguer la signature de cette onde radiative du à l'ajustement du système. Cet ajustement est plus conséquent chez Spall et Holland ce qui amène la disparition de la signature du vortex dans les champs de surface libre très rapidement. A contrario, dans nos résultats tout comme ceux de Penven, le vortex est encore bien identifiable sur la surface libre et ce même après 100 jours de simulation. Cependant contrairement aux résultats de Penven, on obtient un champ de surface libre beaucoup plus bruité. Sur la figure 2.7, les champs présentent une forte variabilité autour de zéro. Ce bruit n'est pas uniquement visible autour de cette valeur, mais c'est là qu'il est le plus identifiable.

Sur les figures 2.5 (b), (c) et (d), on peut voir également l'apparition de bruit au bord. La condition limite est à explorer plus en profondeur. Plusieurs tests ont été réalisé avec bords, sans bord et couches éponges pour voir leurs effets sur le bruit observé. Mais rien pour le moment n'a permis d'obtenir une solution plus propre que celle présentée ici pour des grandes valeurs de pas de temps.

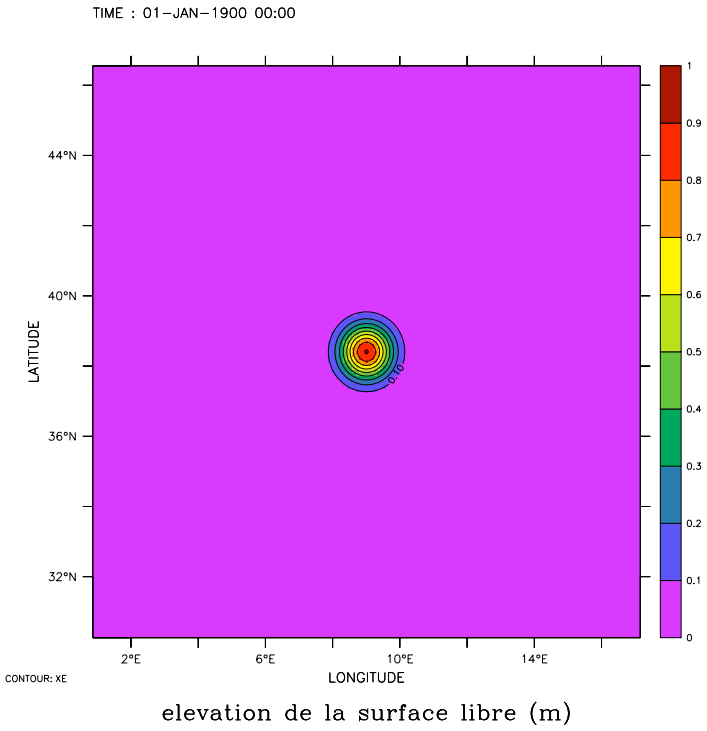
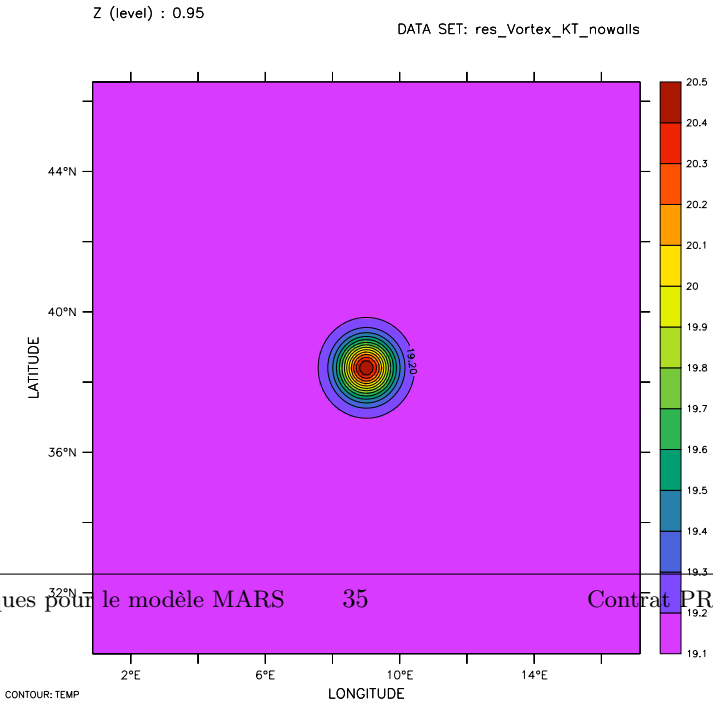


FIG. 2.2 – Elévation de la surface libre. Les contours sont tracés tous les 10 cm.



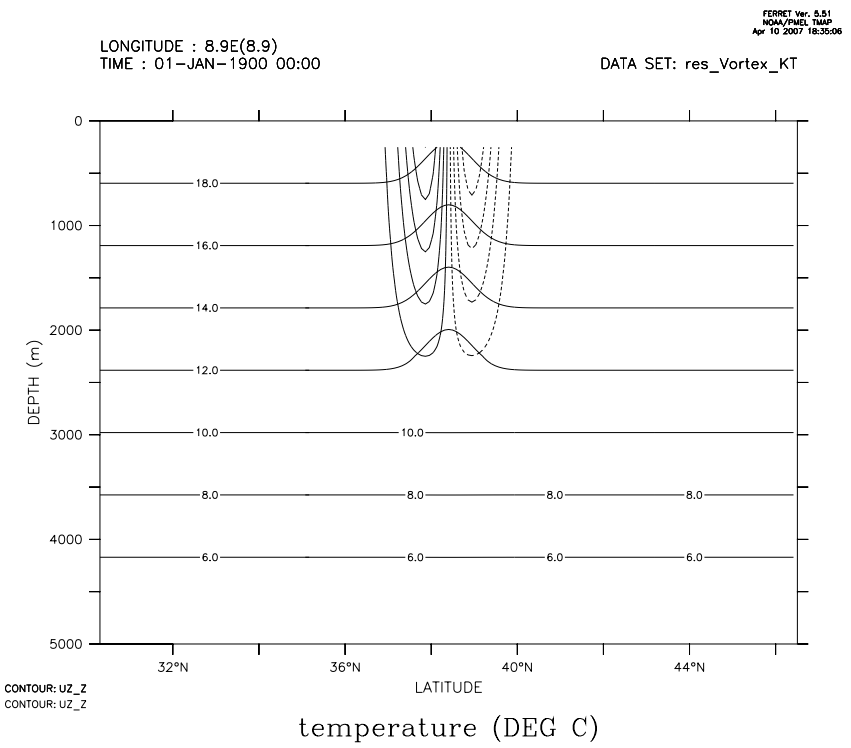


FIG. 2.4 – Coupe verticale, dans le plan Y-Z, du champ de température et de la structure du courant zonal barocline.

2.3 Vortex Barotrope

2.3.1 Introduction

Ce cas test est une reproduction de la configuration d'un vortex barotrope en équilibre cyclo-géostrophique proposée par Frédéric Vandermeirch.

Ce cas test a été implémenté dans MARS. On peut trouver les fichiers correspondants dans les répertoires /$UDIR/Vbar/Vbar-V6-03/ et /$RDIR/Vbar/Vbar-V6-03/. Les fichiers importants sont Vbar.F90, equeta_lin.F90. Des versions en V6.05 et en V6.14 sont aussi disponibles. Cette dernière sert d'ailleurs de support pour la mise en place de la formulation en flux de la conservation de la quantité de mouvement. Ainsi le cas test est décliné en 2D et 3D afin de tester la validité des routines mises en place pour cette tâche. Finalement une version en MARS V6-14 est disponible avec le schéma de la conservation de la quantité de mouvement en flux.

La simulation est un problème aux conditions initiales. Le modèle est initialisé par des champs de surface libre et de vitesses. Puis MARS évolue sans aucun forcage.

2.3.2 Conditions initiales

Ce vortex consiste en une variation (élévation dans le cas d'un anti-cyclone et diminution dans le cas d'un vortex cyclonique) gaussienne de la surface libre en équilibre avec un champ de vitesses cyclo-géostrophiques dans une configuration barotrope.

La surface libre a alors pour expression :

$$\zeta = \zeta_0 e^{-(\frac{r}{r_0})^2} \text{ en symétrie azymutale,} \tag{2.5}$$

r est la distance radiale par rapport au centre du tourbillon.

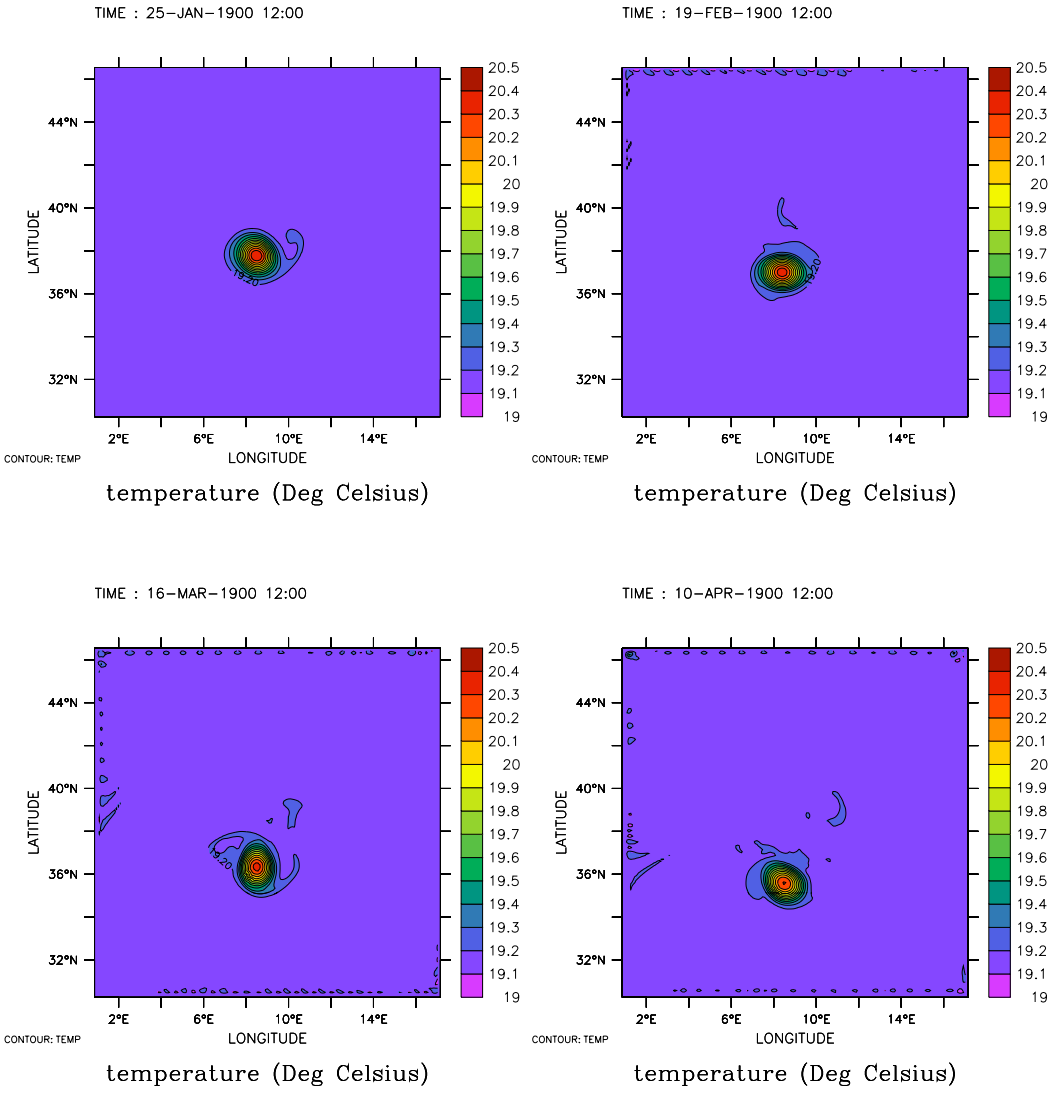


FIG. 2.5 – Evolution du champ de température en fonction du temps. Les contours sont tracés tous les 0.1 degré.

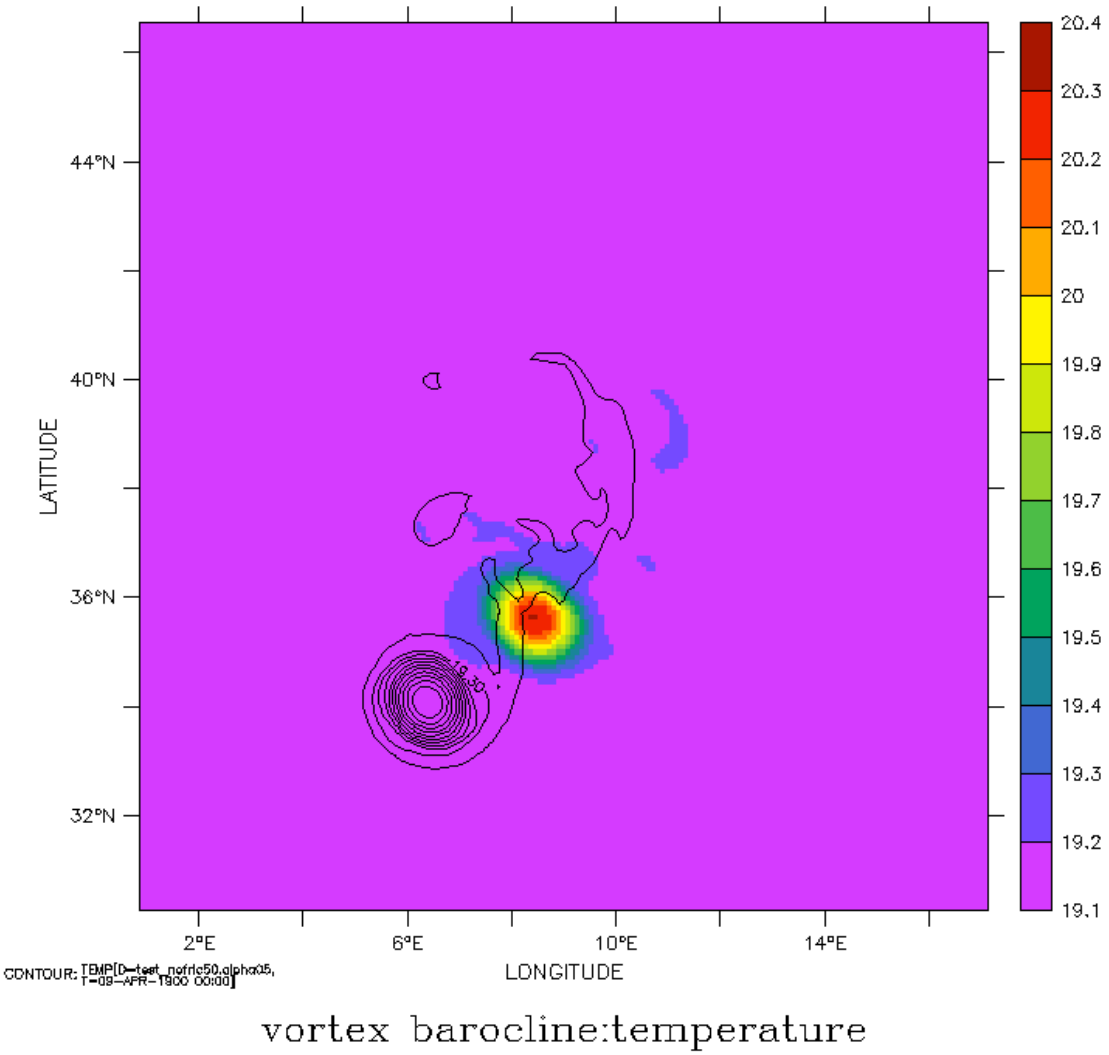


FIG. 2.6 – Comparaison du champ de température pour deux pas de temps différents au bout de 99 jours. Le champ est le résultat de la simulation pour $dt = 960$s, les contours sont le résultat de la simulation pour $dt = 50$. Les contours sont tracés tous les 0.1 degré.

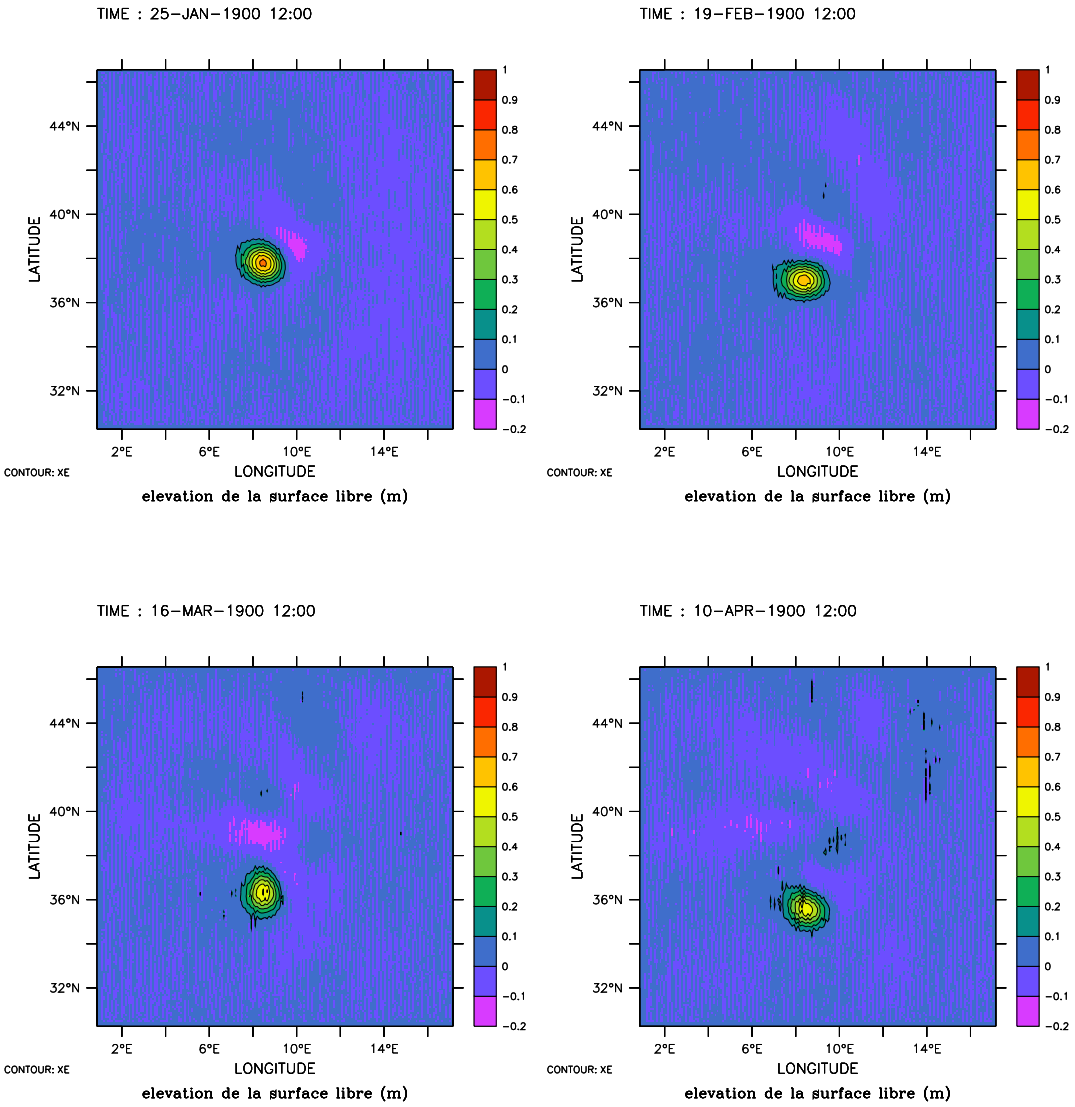


FIG. 2.7 – Evolution de l'élévation de la surface libre pour 4 temps successifs : (a) t=25, (b) t=50, (c) t=75 et (d) t=100 jours. Les contours sont tracés tous les 10 cm entre +10 cm et +1 m

Pour obtenir un équilibre cyclo-géostrophique, il faut que la surface libre ζ et la vitesse azymutale v_θ vérifient la relation :

$$\frac{{v_\theta}^2}{r} + f v_\theta = g \frac{\partial \zeta}{\partial r}, \tag{2.6}$$

avec f le paramètre de coriolis et g la gravité.

Alors deux solutions sont possibles, mais pour que la vitesse s'annule à l'infini, on ne retient que la forme :

$$v_\theta = \frac{fr}{2}\left(-1 + \sqrt{1 + \frac{4g}{f^2 r}\frac{\partial \zeta}{\partial r}}\right). \tag{2.7}$$

Ici on a $\frac{\partial \zeta}{\partial r} = -\frac{2r}{{r_0}^2}\zeta_0 e^{-(\frac{r}{r_0})^2}$.

Soit au final :

$$v_\theta = \frac{fr}{2}\left(-1 + \sqrt{1 - \frac{8g}{f^2 {r_0}^2}\zeta_0 e^{-(\frac{r}{r_0})^2}}\right). \tag{2.8}$$

Ce qui amène une première réflexion sur la structure des vortex selon le type considéré. En effet, dans le cas d'un vortex cyclonique, la valeur de ζ_0 est négative. Alors sous la racine carré dans l'équation 2.8, l'expression est définie positive. Par contre dans le cas anti-cyclonique, on obtient une condition sur la valeur maximale de ζ_0 de la forme :

$$\frac{\zeta_0}{{r_0}^2} < \frac{f^2}{8g} e^{(\frac{r}{r_0})^2}. \tag{2.9}$$

Or $e^{(\frac{r}{r_0})^2}$ a pour valeur minimale 1, ainsi, en respectant la condition :

$$\frac{\zeta_0}{{r_0}^2} < \frac{f^2}{8g}, \tag{2.10}$$

nous donne une limite "large" pour la valeur maximun de ζ_0 en fonction des autres paramètres. Cette limitation peut être d'ailleurs observée dans les mesures. Les cyclones peuvent présenter un gradient de pression très abrupte alors que les anti-cyclones présentent toujours une évolution de pression plus "plate".

Pour le run de référence on va prendre comme valeur des constantes : $r_0 = 60km$, $\zeta_0 = 0.5m$ pour un océan de 5km de profondeur.

2.3.3 Paramètrage de la configuration

Pour ce cas test, on se place dans le cas d'un plan-f centré autour de 30 degré de latitude Nord. Contrairement au cas précédent où l'on attendait un déplacement du vortex sur le plan β, ici sur un plan-f le vortex ne doit pas bougé. On se place sur une grille cartésienne de 10 km de maille avec un pas de temps de 800 secondes.

On utilise alors les paramètres suivants :

Dans le fichier parametres.F90_Vbar

- $jmin = 0$;
- $imin = 0$;
- $jmax = 182$;
- $imax = 182$;
- $kmax = 1$.

Les autres valeurs de paramètres sont laissées identiques à celle du premier cas test de MARS ; le cylindre dessallé décrit dans l'article de (Tartinville *et al.*, 1998).

Le détail des paramètres se trouve dans les annexes.

2.3.4 Champs d'initialisation et Run de référence.

Sur la fig. 2.8, on a représenté le champ de l'élévation de la surface libre pour différents temps de la simulation. Le premier champ en haut à gauche est le champ d'initialisation du vortex barotrope.

Les champs suivants sont chronologiquement organisés. Les champs 2, 3 et 4 sont donnés tous les 30 jours de simulation. Les champs 5 et 6 représentent l'état à 100 et 107 jours.

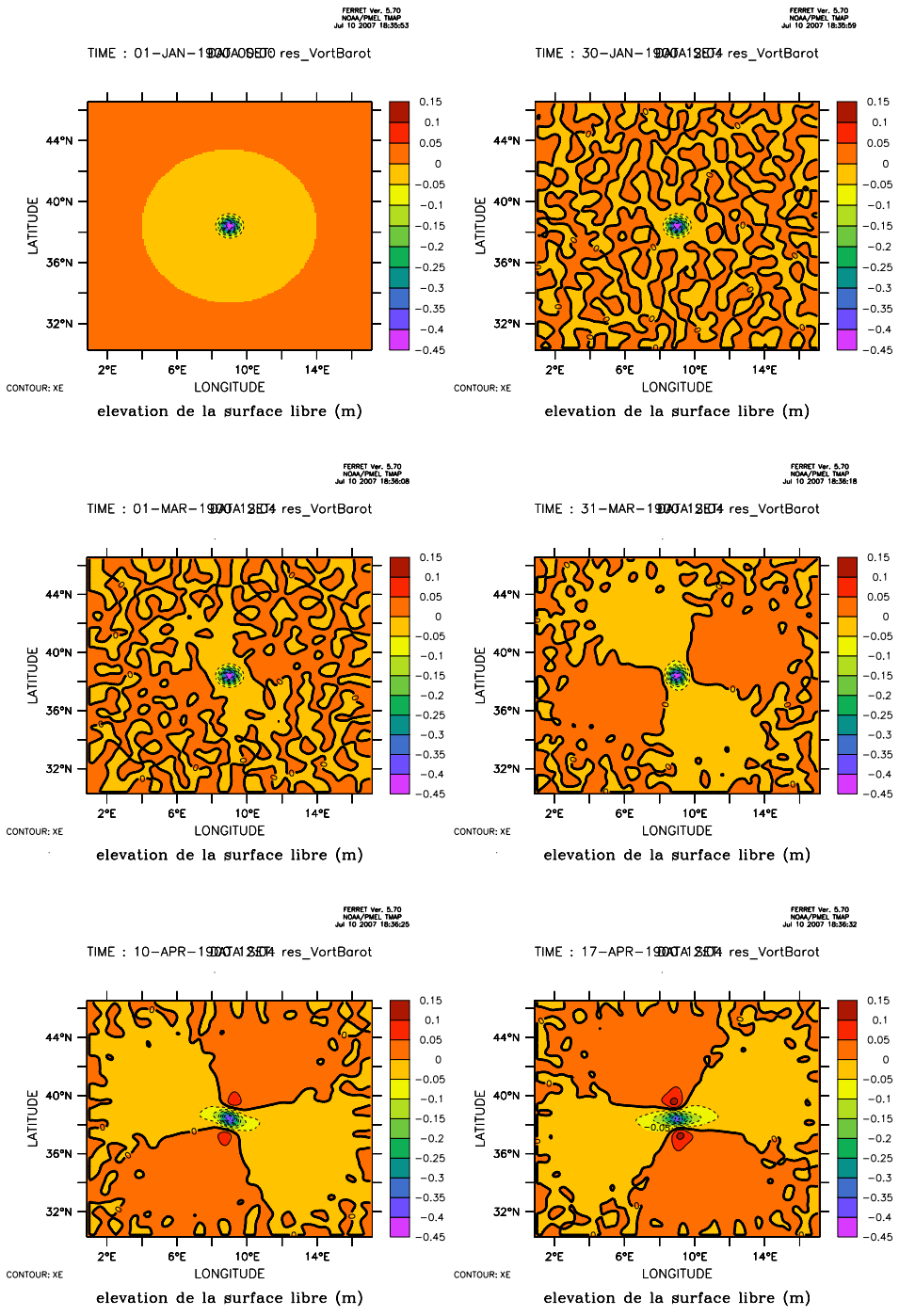


FIG. 2.8 – Elévation de la surface libre pour différents moments de la simulation((a) initialisation).

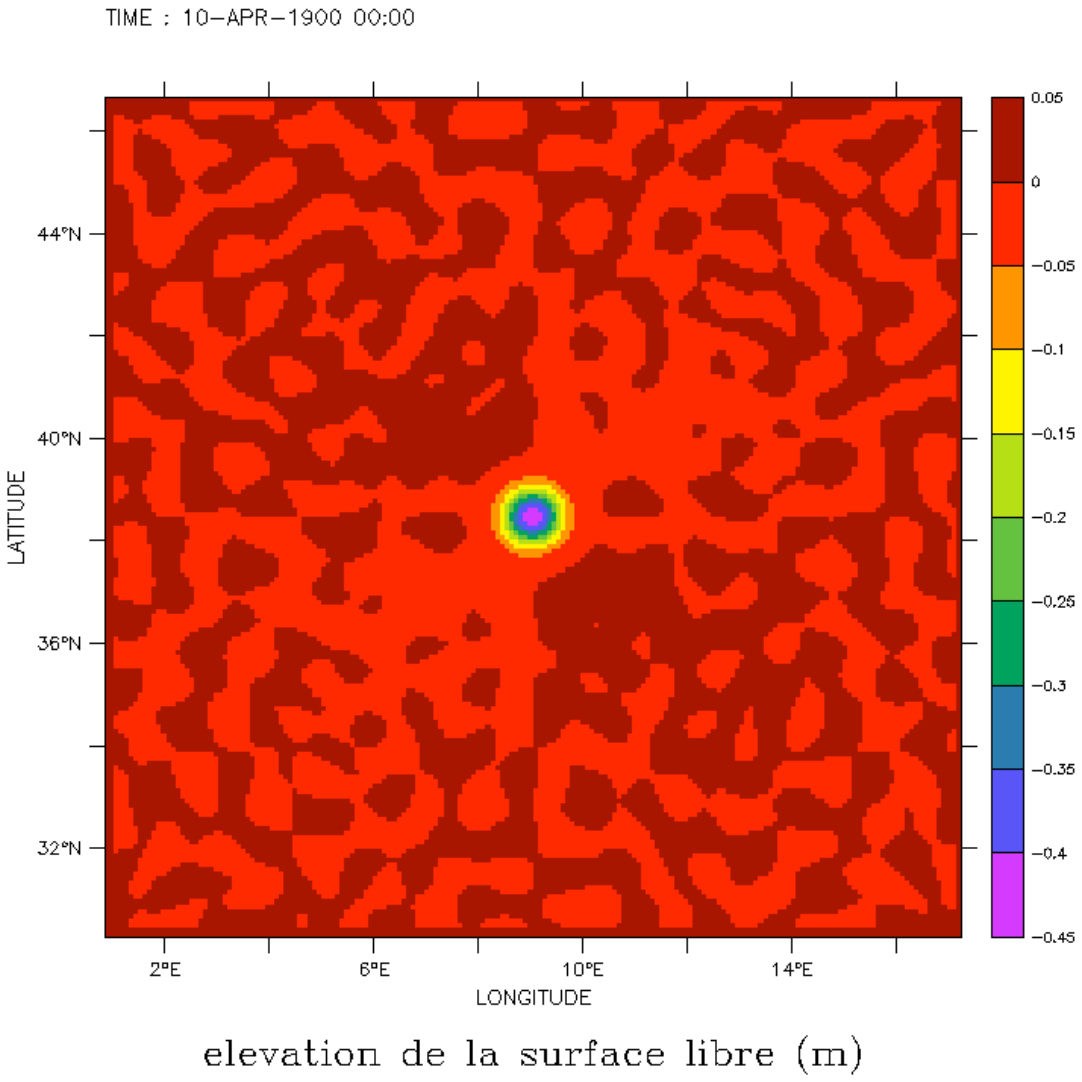


FIG. 2.9 – Champ de surface libre après de 100 jours de simulation pour un pas de temps de 50 secondes.

On remarque sur ces champs que le vortex n'est pas tout à fait en équilibre. On observe la génération d'ondes de surface qui bruitent les données. Avec le temps, les perturbations de la surface libre semblent s'organisé en structure plus large (pour les champs 4, 5 et 6). La première idée qui vient à l'esprit est que dans le cas de la turbulence en deux dimensions, la cascade inverse envoie l'énergie vers les grandes échelles. Afin de vérifier cette hypothèse il faut établir la valeur du nombre de Froude ($Fr = \frac{U}{\sqrt{(gH)}}$) de la simulation afin de vérifier si effectivement nous avons à faire à un écoulement turbulent. Avec les valeurs de g et H pour cette simulation il est évident que dans ce cas barotrope le nombre de Froude est très petit. Ainsi l'écoulement n'est pas à priori turbulent et l'organisation en plus grande structure n'est pas à priori le produit de la cascade inverse d'énergie en turbulence 2D.

La fig 2.10 représente l'évolution temporelle de l'énergie cinétique totale du système en rouge et en vert celle du vortex seul. On voit bien sur ces courbes que durant les 75 premiers jours le vortex est relativement stable. Ce qui est concordant avec les champs de la fig 2.8. Au-delà, de 80 à 110 jours, les perturbations se développent et créent les deux bosses positives d'élévation de la surface libre que l'on observe sur le dernier champ. Cela se traduit par une augmentation de l'énergie cinétique totale du système. Sur la fig 2.11 on a représenté la valeur de la dérivé seconde du champ de vitesse zonale sur l'axe méridional du vortex. La condition nécessaire d'instabilité est qu'il faut au moins que cette dérivée seconde du courant barotrope change de signe (Pedlosky, 1987). Ce qui est clairement le cas ici, la dérivée seconde change plusieurs fois de signe, néanmoins cette condition n'est que nécessaire mais pas suffisante. Aussi on ne peut affirmer que les perturbations sont le fruit d'instabilité barotrope de l'écoulement.

Dans un même temps, le vortex est progressivement "pelé" et perd en intensité. Sur les champs, on voit bien que la valeur du minimum de surface libre augmente (passant de -0.45m au début à -0.4m vers la fin de la simulation) ce qui se traduit en terme d'énergie cinétique par une diminution sur la courbe verte de la figure 2.10. Cependant on observe également une remontée de cette énergie en fin de simulation. On peut expliquer ce phénomène simplement par le fait que le calcul de l'énergie du tourbillon est fixé sur la forme originale de celui-ci. Aussi lorsqu'il se déforme à la fin, on ne calcule plus réellement l'énergie du tourbillon uniquement mais l'énergie de la zone prédéfinie ce qui ne correspond plus exactement à la structure.

Pour vérifier si ces observations ne sont pas dues à un artéfact numérique lié à la valeur du pas de temps, comme dans le cas du déplacement plus lent du Vortex barocline, on a réalisé une autre simulation en prenant un pas de temps de 50 secondes. A nouveau les résultats sont spectaculaires. La fig. 2.9 montre le résulat de cette simulation au bout de 100 jours d'intégration. Sur cette figure, on peut toujours observer la faible anomalie de surface libre que l'on observait sur le run de référence. Cependant cette anomalie ne s'organise pas en une structure plus grande avec le temps. La valeur de surface libre du Vortex est quasiment identique à la condition initiale. C'est le genre de résultat que l'on espérait. Etant donné que le tourbillon est une solution exacte et équilibrée de l'équation non-linéaire, il était légitime d'attendre que le tourbillon reste stable sur l'ensemble de la simulation. Ainsi, la structure observée dans le run de référence est due à un artéfact numérique lié à la dispersion numérique du schéma pour de grande valeur de pas de temps.

2.4 Jet Barotrope

2.4.1 Introduction

Pour tester les nouveaux schémas temporels développés par Marc Honnorat dans le cadre de l'étude du schéma A.D.I. standard de MARS, il s'est avéré nécessaire d'avoir un cas test de jet barotrope cyclique zonalement et potentiellement instable.

Ce cas test consiste donc en un canal zonal périodique de 1000km de large sur 1000km de long avec une profondeur (ajustable selon les besoins) de 5 km. Il a été implémenté dans MARS en version V6.14. On peut trouver les fichiers correspondants dans les repertoires /$UDIR/JETBT/JETBT-V6.14.ST/ et /$RDIR/JetBcl/JetBcl-V6.14.ST/. Le fichier principal est JETBT.F90.

Ce cas test se décline en 3 versions différentes. Par l'intermédiaire de la valeur du paramètre *optionjet*, dont la valeur est égale à 1, 2 ou 3, on va alors définir un courant barotrope potentiellement instable de 3 natures différentes. Afin d'être potentiellement instable le profil de vitesse barotrope, ici $U(y)$, doit présenté au moins un changement de signe dans sa dérivée seconde (ici en y). Chaque option de ce cas test a été développé en ce sens.

Chaque option réside en une variation de surface libre en équilibre géostrophique avec un champ de vitesse zonale. L'option 1 correspond à un profil de vitesse en cos^2. L'option 2 est une dorsale zonale de

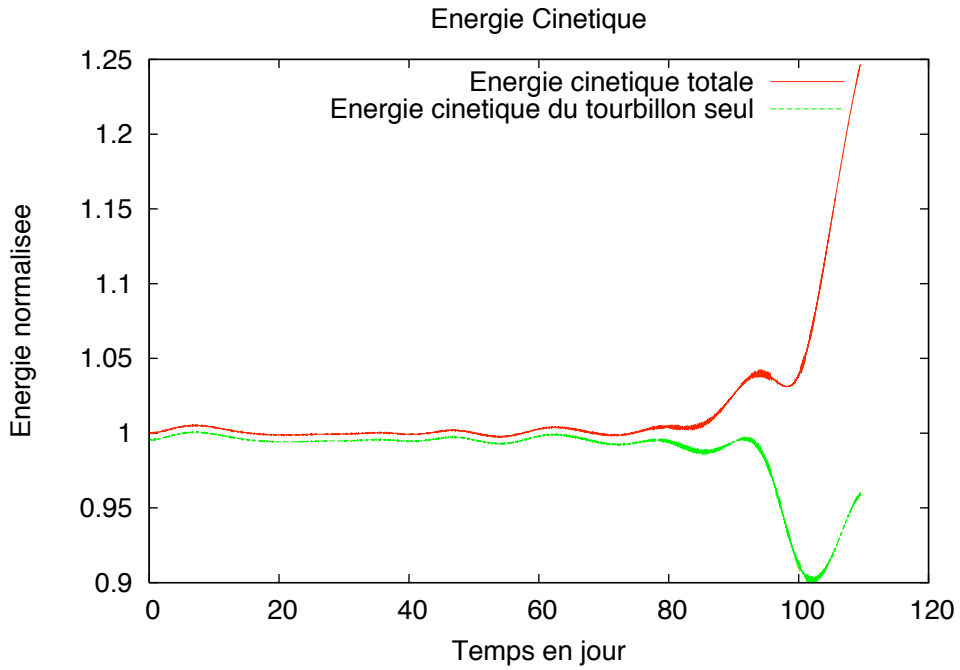


FIG. 2.10 – Energie cinétique (a) du domaine et (b) de la zone couverte par le vortex seulement et fonction du temps. Les valeurs sont normalisées par rapport à la valeur de l'énergie cinétique totale à l'initialisation.

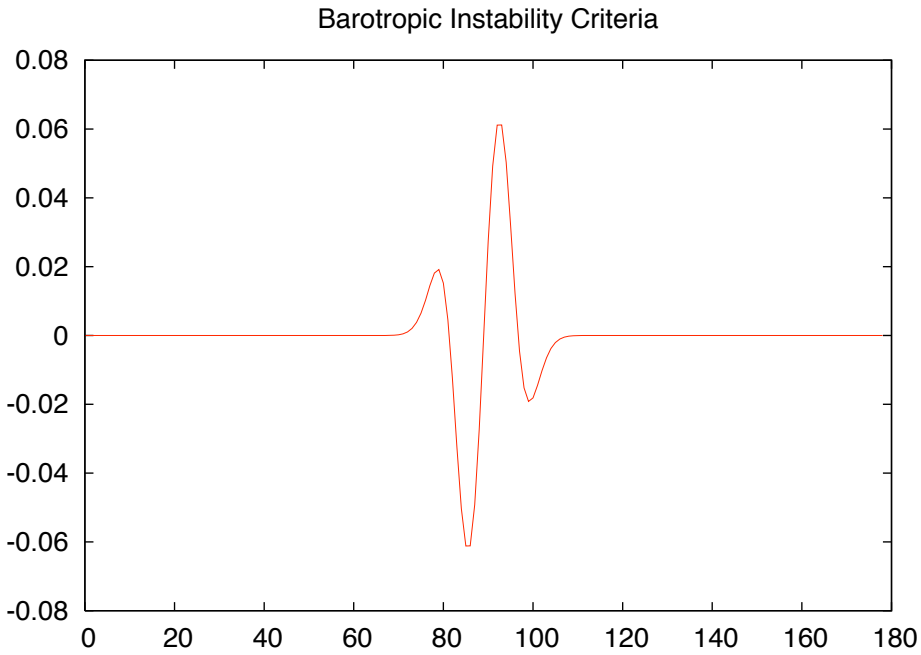


FIG. 2.11 – Valeur adimensionnelle de la dérivée seconde de la vitesse zonale sur l'axe méridien du troubillon.

surface libre de section gaussienne. Et enfin l'option 3, est une variation méridienne de surface libre selon un profil en tangente hyperbolique.

2.4.2 Conditions initiales

On va décrire plus en détails chaque condition initiale suivant l'option choisie.

Option 1

On a choisi ici un profil de vitesse en cos^2, soit :

$$u(y) = u_o cos^2\left(\pi y / 2y_o\right), \tag{2.11}$$

pour $abs(y) < y_o$ avec u_o la valeur maximum du courant et y_o la demi-largeur du courant. Pour $abs(y) > y_o$, $u(y) = 0$.

On doit alors déterminer la valeur de la surface libre $\zeta(y)$ qui vérifie l'équilibre géostrophique :

$$fu(y) = -g\frac{\partial \zeta}{\partial y}. \tag{2.12}$$

On trouve alors :

$$\zeta(y) = -\frac{fy_o u_o}{\pi g}\left[\frac{\pi y}{2y_o} + \frac{1}{2}sin\left(\frac{\pi y}{y_o}\right)\right] \tag{2.13}$$

Pour le run de référence de cette option, il faut définir les valeurs des deux constantes y_o et u_o. On prendra $y_o = 50km$ et $u_o = 1.5m.s^{-1}$.

Option 2

On réalise ici le processus inverse, on fixe la surface libre que l'on dérive pour obtenir le profil de vitesse afin de respecter l'équilibre géostrophique 2.12. On a alors :

$$\zeta(y) = \zeta_o exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{y_o}\right)^2\right]. \tag{2.14}$$

Ce qui donne :

$$u(y) = \frac{g\zeta_o y}{f{y_o}^2} exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{y_o}\right)^2\right]. \tag{2.15}$$

L'intérêt ici est que l'on crée un cisaillement de courant assez fort, puisque l'on a deux jets de sens opposés (de part et d'autre de la bosse de surface libre).

Les valeurs des constantes dans cette option pour le run de référence seront : $\zeta_o = 1m$ et $y_o = 50km$.

Option 3

On réalise la même méthode que pour l'option 2 mais ici on ne veut obtenir qu'un seul courant. On prend alors un profil en tangente hyperbolique pour la surface libre. Soit :

$$\begin{aligned} \zeta(y) &= -\zeta_o \tanh\left(y/y_o\right), \text{ pour } abs(y) \leq y_o, \\ \zeta(y) &= -\zeta_o, \text{ pour } y > y_o, \\ \zeta(y) &= \zeta_o, \text{ pour } y < -y_o. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned} u(y) &= \frac{g\zeta_o}{fy_o}\left[1 - \tanh^2\left(y/y_o\right)\right], \text{ pour } abs(y) \leq y_o, \\ u(y) &= 0, \text{ pour } abs(y) > y_o. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Les valeurs des constantes dans cette option pour le run de référence seront : $\zeta_o = 0.5m$ et $y_o = 30km$.

2.4.3 Paramètrage de la configuration

Pour les 3 options les paramètres seront identiques. On se place sur un plan-β centré autour de 45 degré de latitude Nord, pour un océan homogène de 5km de profondeur. On utilise une grille cartésienne de 10km avec un pas de temps de 800 secondes.

Dans le fichier parametres.F90_JETBT

- $jmin = 0$;
- $imin = 0$;
- $jmax = 101$;
- $imax = 101$;
- $kmax = 1$.

Les autres valeurs de paramètres sont laissées identiques à celle du premier cas test de MARS ; le cylindre dessallé décrit dans l'article de Tartinville *et al.* (1998).

Le détail des paramètres se trouve dans les annexes.

2.4.4 Champs d'initialisation et Run de référence

Option 1

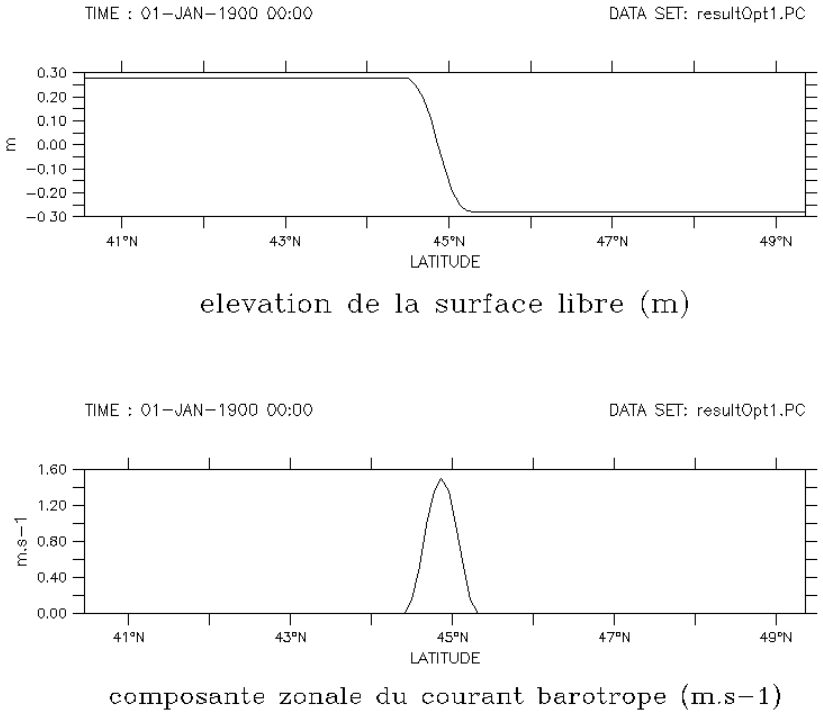


FIG. 2.12 – Profils de surface libre (a) et de vitesse (b) en coupe méridienne pour le jet barotrope correspondant à l'option 1.

Fig. 2.12 présente la condition intiale du courant barotrope correspondant à l'option 1. On voit bien le profil en cos^2 du champ de vitesse sur la figure (b) et le champ de surface libre (a).

On a simulé 120 jours à partir de cette condition initiale. Fig 2.13 donne l'évolution des champs de surface libre pour des temps plus ou moins espacés de 30 jours. Sur cette figure on voit que l'instabilité est lente à se développer. D'ailleurs ce n'est qu'en fin de simula tion qu'une onde se crée et commence à développer une oscillation. Ce qui nous amène à la conclusion que cette configuration n'est pas très interessante pour tester la stabilité des schémas temporels qui seront implémentés dans le code.

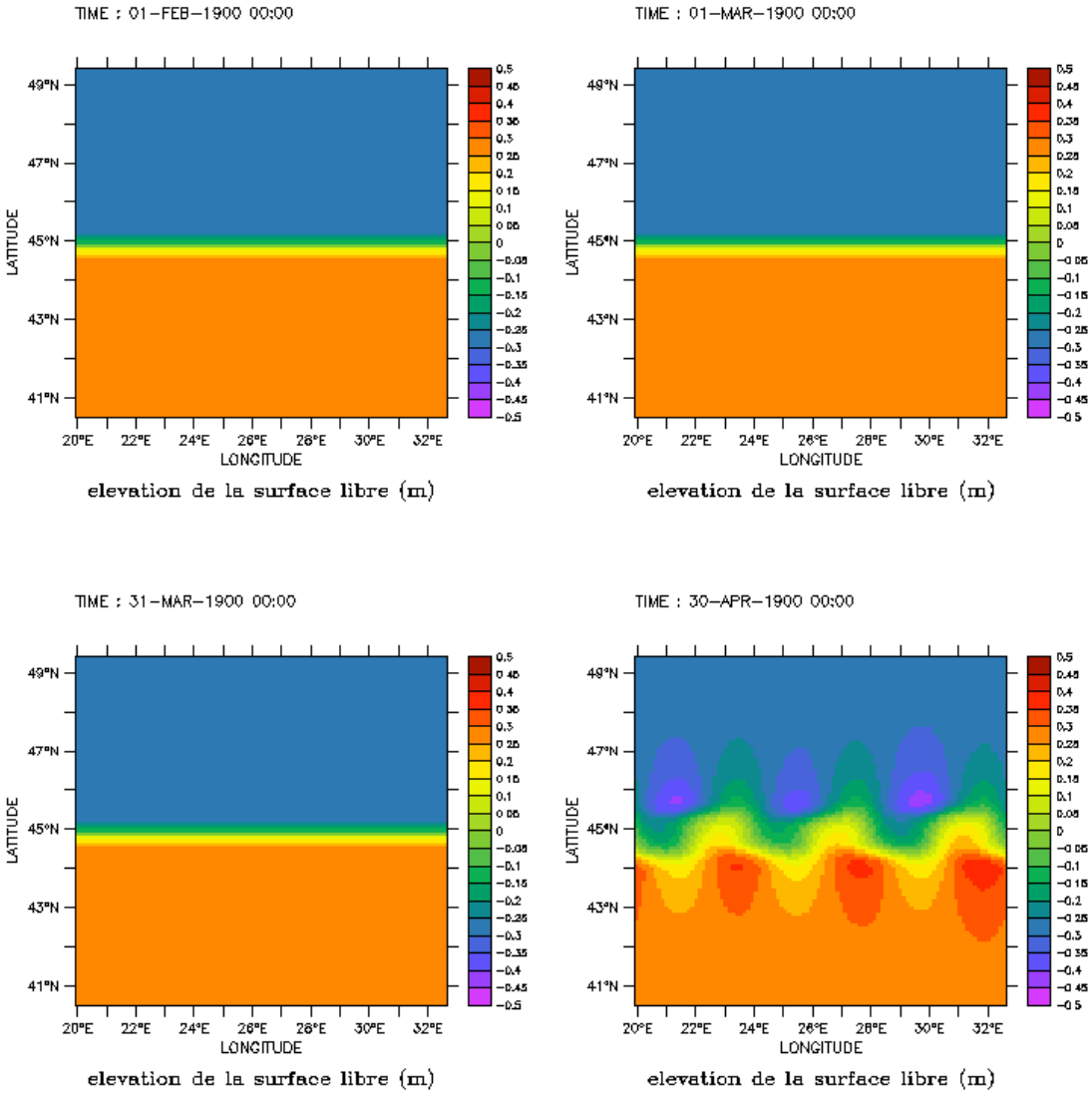


FIG. 2.13 – Evolution du jet barotrope correspondant à l'option 1.

Option 2

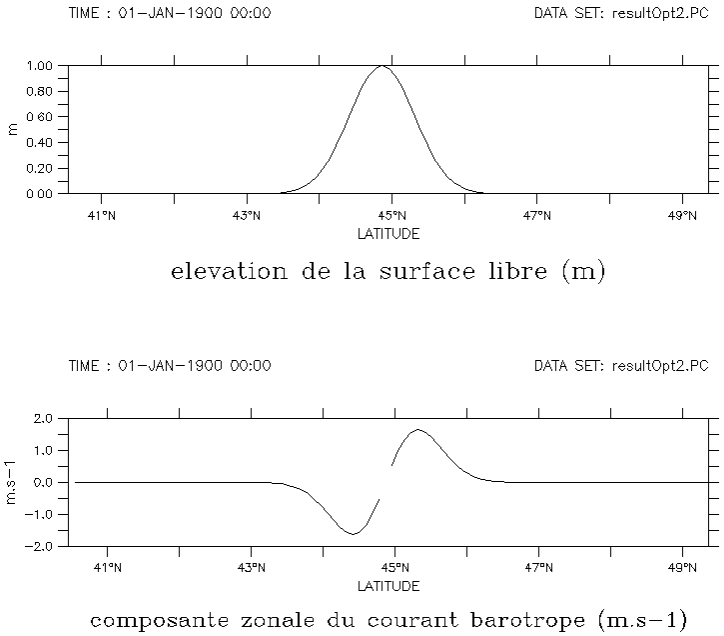


FIG. 2.14 – Profil de surface libre (a) et de vitesse (b) en coupe méridienne pour le jet barotrope correspondant à l'option 2.

Sur la figure 2.14 on a représenté la surface libre correspondant à l'option 2. On a le profil gaussien sur le panneau (a) pour la surface libre et le champ de vitesse géostrophique sur le panneau (b). Ce champ de vitesse présente bien les deux courants de sens opposés. Cette configuration doit probablement développer des instabilités dues à ce fort cisaillement imposé à la condition initiale.

Sur la figure 2.15 on a l'évolution temporelle sur les 120 jours de simulations. On voit sur cette figure que les instabilités ne se développent pas très rapidement. Au 1er mars, panneau (b), on commence à peine à voir se développer une onde. Mais cette onde se déstabilise rapidement et déjà 30 jours plus tard les instabilités ont développé des structures larges qui à l'origine repésentait des cellules de type instabilités de Kelvin-Helmholtz et qui augmente en taille au fur et à mesure de la simulation. Finalement, au bout de 120 jours, on obtient une grosse structure de la taille du bassin. On peut penser que cette structure est le fruit de la cascade inverse de turbulence en deux dimension. Cette cascade inverse envoie l'énergie vers les grandes échelles. Evidemment, on peut également croire à un artéfact comme dans le cas du vortex barotrope (2.3). Ce n'est pas le cas.

En effet, sur la figure 2.16 on peut voir l'évolution temporelle de la même condition initale 2.14 mais pour un pas de temps de 50 secondes au lieu de 800. Sur le panneau (a), qui correspond à la date du 9 février, on voit déjà apparaître une oscillation du courant barotrope. On observe ces oscillations seulement pour le début mars dans le cas du pas de temps précédent. Par la suite, le régime instable est déjà établi pour le début mars contrairement au run de référence où il faut attendre la fin avril pour être dans le même état. Ainsi, on obtient le même type d'observation que pour le vortex barocline et le vortex barotrope. lorsque que l'on diminue fortement la valeur du pas de temps les petites échelles ne sont pas amorties (voir bloquées comme pour les grands pas de temps).

Finalement on a réalisé une autre expérience à partir de l'option 2. On a ajouté une perturbation aléatoire de l'ordre de 10^{-5} $m.s^{-1}$ au champ de vitesse zonal et méridien dans la condition initiale. Cela a eu pour conséquence de favoriser la déstabilisation du courant barotrope. Les ondes apparaissant début mars pour un pas de temps de 800 secondes sont maintenant observables dès le début février. Et donc il s'en suit l'établissement du régime déstabilisé beaucoup plus rapidement.

Quoi qu'il en soit, cette simulation présente bien les caractéristiques que nous recherchons pour tester les

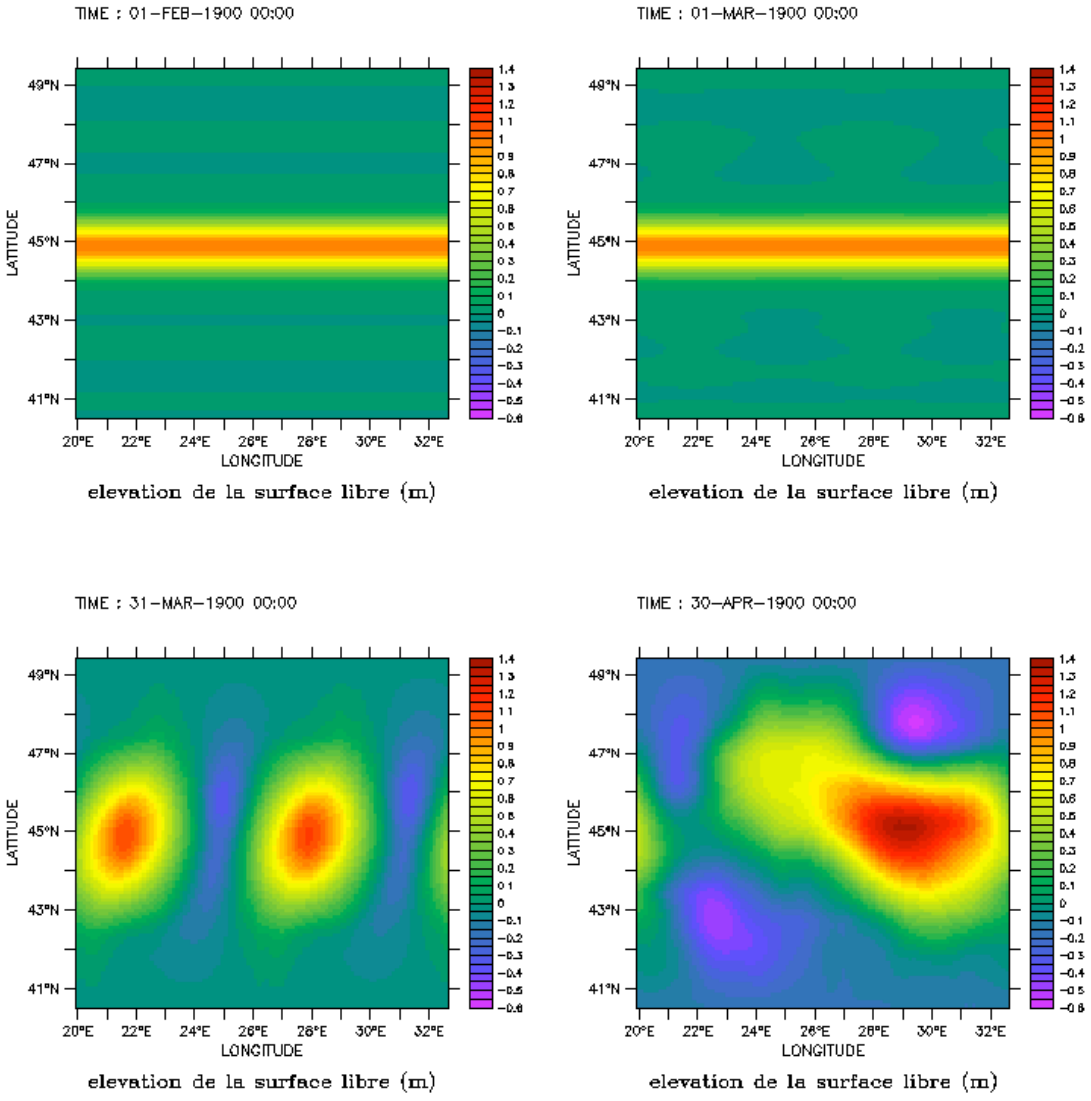


FIG. 2.15 – Evolution du jet barotrope correspondant à l'option 2.

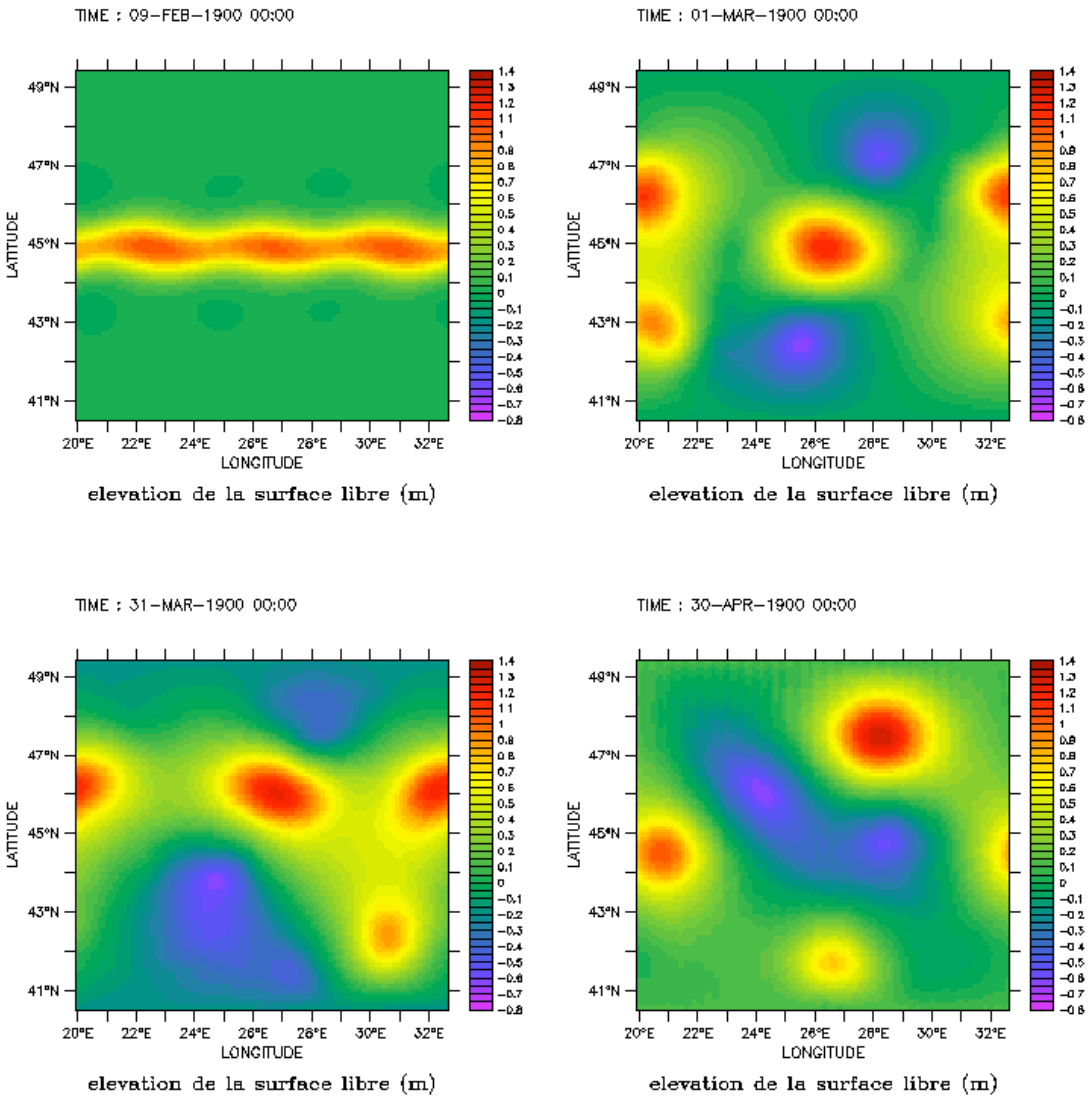


FIG. 2.16 – Evolution du jet barotrope correspondant à l'option 2 mais pour un pas de temps de 50 secondes (au lieu de 800 pour le run de référence).

schémas temporels qui seront implémentés dans MARS. Pour le pas de temps à prendre pour les tests, nous essayerons de déterminer ultérieurement celui qui sera le plus adéquat pour comparer les perfomances des différents schémas.

Option 3

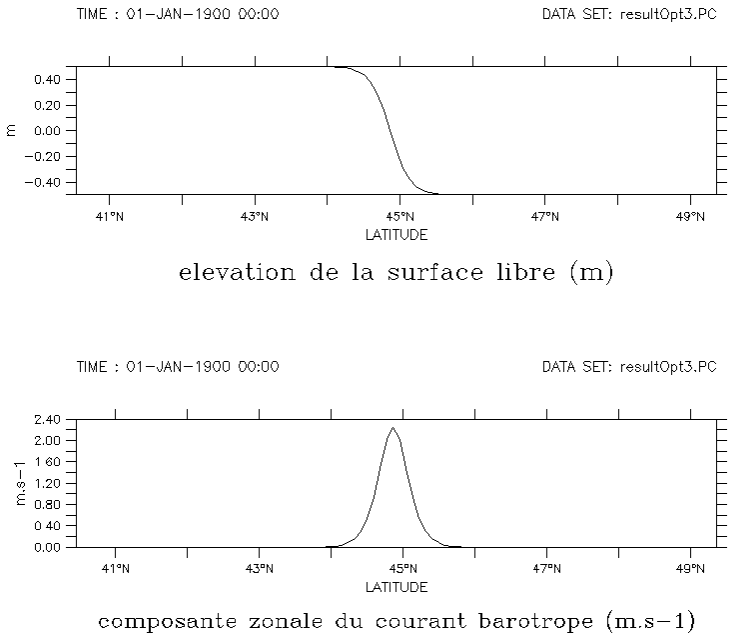


FIG. 2.17 – Profils de surface libre (a) et de vitesse (b) en coupe méridienne pour le jet barotrope correspondant à l'option 3.

La figure 2.17 représente la surface libre pour l'option 3. On retrouve le profil en tangente hyperbolique sur le panneau (a) pour la surface libre et le profil de vitesse géostrophique sur le panneau (b). A la différence de l'option 2, le champ de vitesse présente qu'un seul courant. Dans cette configuration le courant va d'Ouest en Est.

Sur la figure 2.18 on a l'évolution temporelle de la condition initiale. Une fois encore le système a du mal à développer les instabilités barotropes recherchées. Il faut attendre la mi-mars, soit environ 75 jours pour commencer à distinguer clairement une ondulation du courant zonal. Au bout de 120 jours de simulation l'instabilité est bien développée. Mais contrairement à l'option 2, on a encore la signature du courant d'origine. Même si ce dernier présente des méandres importants, on n'a pas encore atteint un régime totalement turbulent.

2.4.5 remarque finale sur le courant barotrope

Ainsi, à la vue des résultats des runs de référence des trois options décrites pour le courant barotrope instable, on va alors choisir l'option 2 qui est plus prompt à développer un régime turbulent. C'est ce que l'on veut pour tester la stabilité des schémas temporels que l'on implémentera dans MARS suite aux résultats de l'étude de Marc Honnorat.

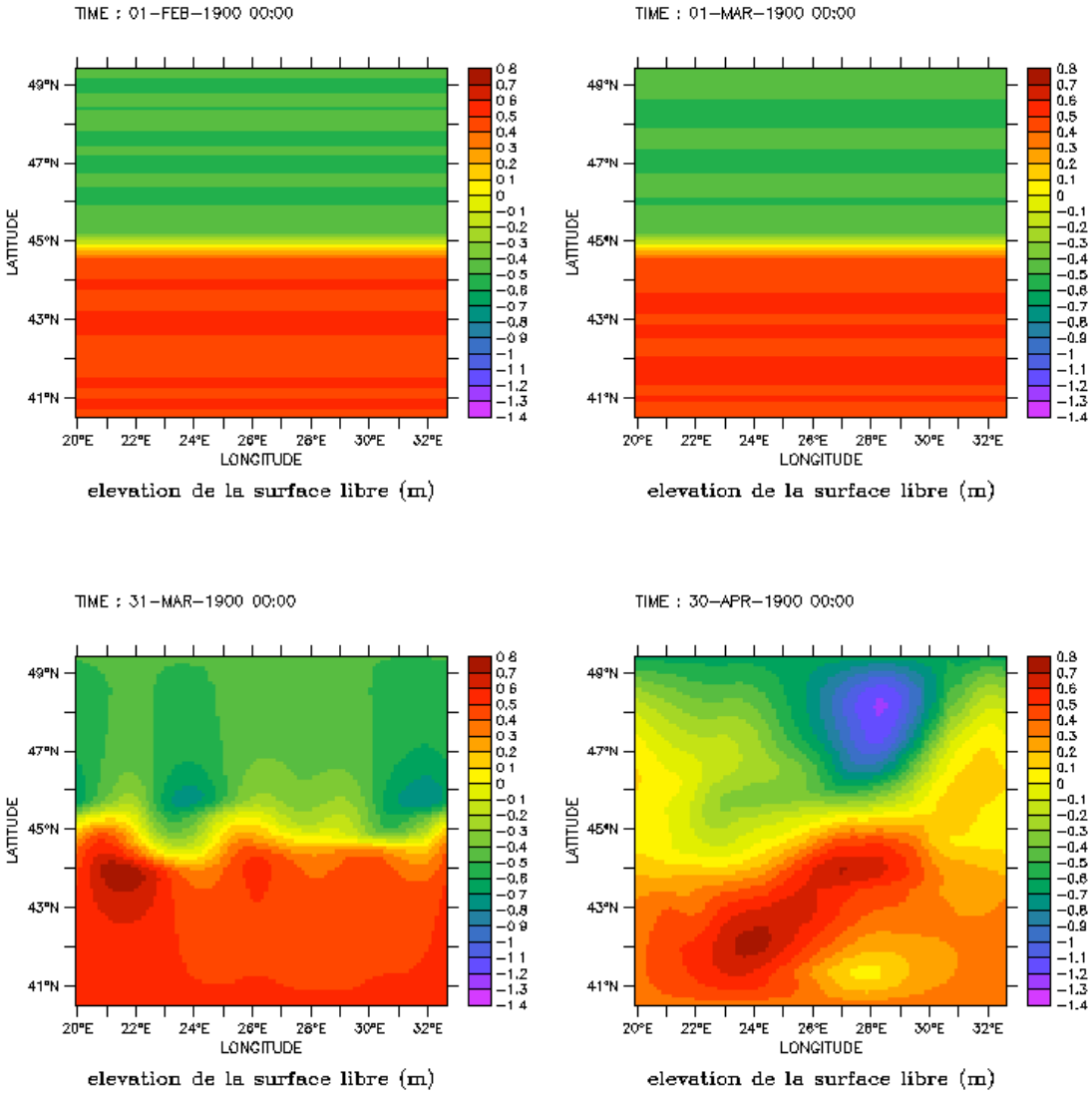


FIG. 2.18 – Evolution du jet barotrope correspondant à l'option 3.

2.5 Smolarkiewicz

2.5.1 Introduction

Dans le cadre de l'étude de nouveaux schémas d'advection pour les traceurs passif, nous avons mis en place un cas test de type Smolarkiewicz (Smolarkiewicz, 1992).

Ce cas test consiste donc à annuler la partie du calcul de la dynamique dans MARS au niveau des routines stepu.F90 et stepv.F90 et de forcer le champ de vitesse vertical à 0 et le champ horizontal à être calculé à partir de la fonction courant suivante :

$$\psi(i,j) = \left(\frac{L_X}{2K}\right) \sin\left(Kx/L_X\right)\cos\left(Ky/L_Y\right). \tag{2.18}$$

Avec, L_X et L_Y les longueurs zonale et méridienne du domaine (pris carré ici soit $L_X = L_Y$), x et y sont les coordonnées et $K = 4\pi$. Ainsi on obtient un champ de vitesse horizontalement non divergent. Les paramètres de pas de temps et de pas de grille sont choisis tels que la CFL du cas test soit égale à 0.25.

Pour utiliser ce cas test, il est nécessaire d'utiliser les clés CPP -Dkey_testadv et -Dkey_smolar. Les routines d'intialisation et les modifications des routines de MARS pour la dynamique se trouve dans le répertoire /$UDIR/PerioAd/PerioAd-V6.18/. La routine pour l'initialisation est PerioAd.F90.

2.5.2 Conditions initiales

Pour les tests d'advection de traceur, on initialise un champ de traceur conique centré au milieu du domaine. Sur la figure 2.19, on a représenté le champ de vitesse ainsi que les contours, en rouge, de la tache de traceur à l'instant initial. Cette tache a une valeur nominale non nulle (ici 10) et une amplitude de 4.

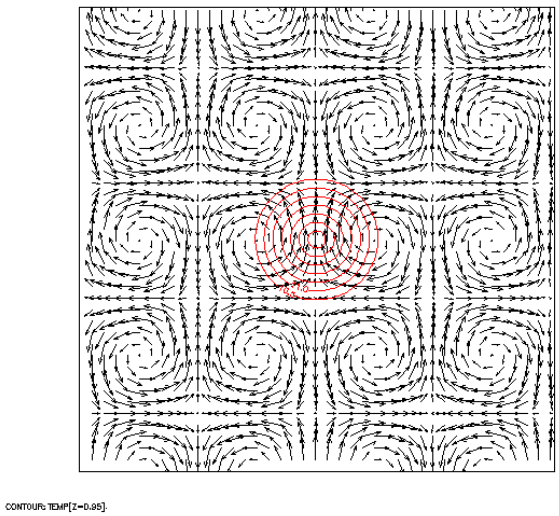


FIG. 2.19 – Champ de vitesse et contour de la tache de traceur à l'instant initial pour le cas test de type Smolarkiewicz.

Dans la section des tests sur les schémas d'advection, on utilisera également une initialisation avec un champ de traceur uniforme égal à 1.

Deuxième partie

Etudes numériques

Chapitre 3

Schémas 2D

Sommaire

3.1 Schéma barotrope du code MARS 57
3.1.1 Équations du mode 2D 58
3.1.2 Schéma numérique complet 58
3.1.3 Linéarisation des équations 2D 59
3.1.4 Schéma numérique linéarisé 60
3.1.5 Schéma 1D pour l'analyse numérique 60
3.1.6 Schéma 2D pour l'analyse du terme de Coriolis 61
3.1.7 Analyse de von Neumann 61
3.2 Analyse 1D du schéma original de MARS 63
3.2.1 Semi-discrétisation en espace du schéma 1D 63
3.2.2 Forme matricielle et polynôme caractéristique 63
3.2.3 Ordre du schéma 64
3.2.4 Stabilité 65
3.2.5 Dispersion 66
3.2.6 Cas limite $h_0 = 0$ 67
3.2.7 Comparaison avec le schéma de ROMS 68
3.2.8 Conclusion 70
3.3 Analyse du terme de Coriolis 71
3.3.1 Forme matricielle et polynôme caractéristique 71
3.3.2 Ordre du schéma 71
3.3.3 Stabilité 71
3.3.4 Dispersion 72
3.3.5 Conclusion 72
3.4 Analyse 2D du schéma original de MARS 73
3.4.1 Stabilité 73
3.4.2 Dispersion 73
3.4.3 Cas limite où $Fr = 0$ 74
3.4.4 Exemples numériques 74
3.4.5 Conclusion 74

Cette note présente une étude du schéma numérique en temps du code MARS pour le mode barotrope (2D), basé sur une méthode ADI. Une analyse numérique menée sur une linéarisation des équations autour d'une vitesse non-nulle montre que le schéma est globalement d'ordre 1. Une condition de stabilité pour ce schéma est déterminée dans le cadre d'une analyse 1D. Le traitement du terme de Coriolis est analysé de manière séparée.

3.1 Schéma barotrope du code MARS

Cette partie présente le schéma numérique mis en œuvre dans le code MARS (Lazure and Dumas, 2007; Pérenne, 2006) pour la résolution du mode barotrope (2D).

Le schéma en temps du mode barotrope repose sur une méthode ADI (*alternating direction implicit*) qui résout de manière alternée sur des demi–pas de temps les composantes zonale et méridienne. En mettant de côté le terme de Coriolis, le traitement de ces deux composantes est identique à une rotation près. Cela va nous permettre de séparer l'analyse du schéma numérique en deux parties : d'une part, une analyse de la résolution d'une composante en 1D ; d'autre part une analyse du traitement du terme de Coriolis en 2D, isolé du reste de la physique.

L'analyse numérique se fait sur une linéarisation des équations autour d'un écoulement particulier. Nous présentons dans la suite les équations simplifiées ne contenant que la physique prise en compte dans l'analyse, puis leur linéarisation autour d'une vitesse de transport non–nulle.

3.1.1 Équations du mode 2D

Comme nous l'avons évoqué en introduction, nous limiterons notre analyse générale du schéma numérique à son application aux équations simplifiées suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \zeta \; + \; \partial_x (h\bar{u}) \; + \; \partial_y (h\bar{v}) \; = \; 0 \\ \partial_t \bar{u} \; + \; \bar{u}\partial_x \bar{u} \; + \; \bar{v}\partial_y \bar{u} \; - \; f\bar{v} \; + \; g\partial_x \zeta \; = \; 0 \\ \partial_t \bar{v} \; + \; \bar{u}\partial_x \bar{v} \; + \; \bar{v}\partial_y \bar{v} \; + \; f\bar{u} \; + \; g\partial_y \zeta \; = \; 0 \end{array} \right. \tag{3.1}$$

Autrement dit, les termes de diffusion, de frottement, de gradient de pression barocline et atmosphérique normalement prise en compte dans la version complète du schéma numérique seront négligés par la suite.

3.1.2 Schéma numérique complet

Les variables ζ, $\bar{u}$ et $\bar{v}$ ainsi que les dérivées sont évaluées spatialement aux points d'indice (i, j) sur un maillage décalé de type Arakawa-C. Dans la suite, les notations $\delta_X[\cdot]$, $\delta_{X^+}[\cdot]$ et $\delta_{X^-}[\cdot]$ désignent toutes des opérateurs de dérivée dans la direction x. Ces opérateurs se distinguent par les indices qu'il mettent en œuvre mais correspondent tous à des schémas centrés en espace. Pour le passage du pas de temps n au pas n+1 (routine `step`), le schéma ADI calcule dans un premier temps les variables ζ et $\bar{v}$ (routine `stepv2d`) au temps $n+\frac{1}{2}$, puis les variables ζ et $\bar{u}$ au temps $n+1$ (routine `stepu2d`).

Le schéma numérique complet appliqué au système d'équations (3.1) est détaillé dans les équations (3.2–

3.3) :

Colonne : (routine `colonne2d`)

Prédicteur :

$$\begin{array}{rcl}
\frac{2}{\Delta t}\left(\zeta^{n+\frac{1}{2},*}-\zeta^{n}\right) & = & -\delta_{X^-}[(d^u+\zeta^{u,n})\bar{u}^n]-\delta_{Y^-}[(d^v+\zeta^{v,n})\bar{v}^{n+\frac{1}{2},*}] \\
\frac{1}{\Delta t}\left(\bar{v}^{n+\frac{1}{2},*}-\bar{v}^{n-\frac{1}{2}}\right) & = & -\bar{u}^{v,n}\delta_X[\bar{v}^{n-\frac{1}{2}}]-\bar{v}^{n+\frac{1}{2},*}\delta_Y[\bar{v}^{n-\frac{1}{2}}]-f\bar{u}^{v,n} \\
 & & -g\left(\alpha_1\delta_{Y^+}[\zeta^{n+\frac{1}{2},*}]+\alpha_2\delta_{Y^+}[\zeta^n]+\alpha_3\delta_{Y^+}[\zeta^{n-\frac{1}{2}}]\right)
\end{array}$$

Correcteur :

$$\begin{array}{rcl}
\frac{2}{\Delta t}\left(\zeta^{n+\frac{1}{2}}-\zeta^{n}\right) & = & -\delta_{X^-}[(d^u+\zeta^{u,n})\bar{u}^n]-\delta_{Y^-}[(d^v+\zeta^{v,n})\bar{v}^{n+\frac{1}{2}}] \\
\frac{1}{\Delta t}\left(\bar{v}^{n+\frac{1}{2}}-\bar{v}^{n-\frac{1}{2}}\right) & = & -\bar{u}^{v,n}\delta_X[\bar{v}^{n+\frac{1}{2},*}]-\bar{v}^{n+\frac{1}{2}}\delta_Y[\bar{v}^{n+\frac{1}{2},*}]-f\bar{u}^{v,n} \\
 & & -g\left(\alpha_1\delta_{Y^+}[\zeta^{n+\frac{1}{2}}]+\alpha_2\delta_{Y^+}[\zeta^n]+\alpha_3\delta_{Y^+}[\zeta^{n-\frac{1}{2}}]\right)
\end{array} \tag{3.2}$$

Filtrage :

$$\zeta^n \leftarrow a\zeta^n+\tfrac{1}{2}(1-a)\left(\zeta^{n-\frac{1}{2}}+\zeta^{n+\frac{1}{2}}\right)$$

Ligne : (routine `ligne2d`)

Prédicteur :

$$\begin{array}{rcl}
\frac{2}{\Delta t}\left(\zeta^{n+1,*}-\zeta^{n+\frac{1}{2}}\right) & = & -\delta_{X^-}[(d^u+\zeta^{u,n+\frac{1}{2}})\bar{u}^{n+1,*}]-\delta_{Y^-}[(d^v+\zeta^{v,n+\frac{1}{2}})\bar{v}^{n+\frac{1}{2}}] \\
\frac{1}{\Delta t}\left(\bar{u}^{n+1,*}-\bar{u}^{n}\right) & = & -\bar{u}^{n+1,*}\delta_X[\bar{u}^n]-\bar{v}^{u,n+\frac{1}{2}}\delta_Y[\bar{u}^n]+f\bar{v}^{u,n+\frac{1}{2}} \\
 & & -g\left(\alpha_1\delta_{X^+}[\zeta^{n+1,*}]+\alpha_2\delta_{X^+}[\zeta^{n+\frac{1}{2}}]+\alpha_3\delta_{X^+}[\zeta^n]\right)
\end{array}$$

Correcteur :

$$\begin{array}{rcl}
\frac{2}{\Delta t}\left(\zeta^{n+1}-\zeta^{n+\frac{1}{2}}\right) & = & -\delta_{X^-}[(d^u+\zeta^{u,n+\frac{1}{2}})\bar{u}^{n+1}]-\delta_{Y^-}[(d^v+\zeta^{v,n+\frac{1}{2}})\bar{v}^{n+\frac{1}{2}}] \\
\frac{1}{\Delta t}\left(\bar{u}^{n+1}-\bar{u}^{n}\right) & = & -\bar{u}^{n+1}\delta_X[\bar{u}^{n+1,*}]-\bar{v}^{u,n+\frac{1}{2}}\delta_Y[\bar{u}^{n+1,*}]+f\bar{v}^{u,n+\frac{1}{2}} \\
 & & -g\left(\alpha_1\delta_{X^+}[\zeta^{n+1}]+\alpha_2\delta_{X^+}[\zeta^{n+\frac{1}{2}}]+\alpha_3\delta_{X^+}[\zeta^n]\right)
\end{array} \tag{3.3}$$

Filtrage :

$$\zeta^{n+\frac{1}{2}} \leftarrow a\zeta^{n+\frac{1}{2}}+\tfrac{1}{2}(1-a)\left(\zeta^{n+1}+\zeta^n\right)$$

3.1.3 Linéarisation des équations 2D

Pour réaliser l'analyse numérique du schéma, nous considérons une linéarisation des équations (3.1) autour du couple hauteur–vitesse (h_0, u_0, v_0). Soulignons que le modèle n'est pas linéarisé autour d'un écoulement au repos. On suppose donc *a priori* que $(u_0, v_0) \neq 0$. Les équations linéarisées s'écrivent :

$$\left\{\begin{array}{rcl}
\partial_t\zeta + h_0\partial_x\bar{u} + u_0\partial_x\zeta + h_0\partial_y\bar{v} + v_0\partial_y\zeta & = & 0 \\
\partial_t\bar{u} + u_0\partial_x\bar{u} + v_0\partial_y\bar{u} - f\bar{v} + g\partial_x\zeta & = & 0 \\
\partial_t\bar{v} + u_0\partial_x\bar{v} + v_0\partial_y\bar{v} + f\bar{u} + g\partial_y\zeta & = & 0
\end{array}\right. \tag{3.4}$$

3.1.4 Schéma numérique linéarisé

Dans la suite, nous noterons par de simples dérivées partielles ∂_x les opérateurs aux dérivées δ_X. En appliquant le schéma (3.2)–(3.3) aux équations linéarisées (3.4), nous obtenons :

Colonne :

Prédicteur :

$$\begin{array}{rcl}
\frac{2}{\Delta t}\left(\zeta^{n+\frac{1}{2},*}-\zeta^{n}\right) & = & -h_0\,\partial_x\bar{u}^{n}-u_0\partial_x\zeta^{n}-h_0\,\partial_y\bar{v}^{n+\frac{1}{2},*}-v_0\partial_y\zeta^{n}\\
\frac{1}{\Delta t}\left(\bar{v}^{n+\frac{1}{2},*}-\bar{v}^{n-\frac{1}{2}}\right) & = & -u_0\partial_x\bar{v}^{n-\frac{1}{2}}-v_0\partial_y\bar{v}^{n-\frac{1}{2}}-f\bar{u}^{n}\\
 & & -g\,\partial_y\left(\alpha_1\zeta^{n+\frac{1}{2},*}+\alpha_2\zeta^{n}+\alpha_3\zeta^{n-\frac{1}{2}}\right)
\end{array}$$

Correcteur :

$$\begin{array}{rcl}
\frac{2}{\Delta t}\left(\zeta^{n+\frac{1}{2}}-\zeta^{n}\right) & = & -h_0\,\partial_x\bar{u}^{n}-u_0\partial_x\zeta^{n}-h_0\,\partial_y\bar{v}^{n+\frac{1}{2}}-v_0\partial_y\zeta^{n}\\
\frac{1}{\Delta t}\left(\bar{v}^{n+\frac{1}{2}}-\bar{v}^{n-\frac{1}{2}}\right) & = & -u_0\partial_x\bar{v}^{n+\frac{1}{2},*}-v_0\partial_y\bar{v}^{n+\frac{1}{2},*}-f\bar{u}^{n}\\
 & & -g\,\partial_y\left(\alpha_1\zeta^{n+\frac{1}{2}}+\alpha_2\zeta^{n}+\alpha_3\zeta^{n-\frac{1}{2}}\right)
\end{array}$$

(3.5)

Filtrage :

$$\zeta^{n} \;\leftarrow\; a\zeta^{n}+\tfrac{1}{2}(1-a)\left(\zeta^{n-\frac{1}{2}}+\zeta^{n+\frac{1}{2}}\right)$$

Ligne :

Prédicteur :

$$\begin{array}{rcl}
\frac{2}{\Delta t}\left(\zeta^{n+1,*}-\zeta^{n+\frac{1}{2}}\right) & = & -h_0\,\partial_x\bar{u}^{n+1,*}-u_0\partial_x\zeta^{n+\frac{1}{2}}-h_0\,\partial_y\bar{v}^{n+\frac{1}{2}}-v_0\partial_y\zeta^{n+\frac{1}{2}}\\
\frac{1}{\Delta t}\left(\bar{u}^{n+1,*}-\bar{u}^{n}\right) & = & -u_0\partial_x\bar{u}^{n}-v_0\partial_y\bar{u}^{n}+f\bar{v}^{n+\frac{1}{2}}\\
 & & -g\,\partial_x\left(\alpha_1\zeta^{n+1,*}+\alpha_2\zeta^{n+\frac{1}{2}}+\alpha_3\zeta^{n}\right)
\end{array}$$

Correcteur :

$$\begin{array}{rcl}
\frac{2}{\Delta t}\left(\zeta^{n+1}-\zeta^{n+\frac{1}{2}}\right) & = & -h_0\,\partial_x\bar{u}^{n+1}-u_0\partial_x\zeta^{n+\frac{1}{2}}-h_0\,\partial_y\bar{v}^{n+\frac{1}{2}}-v_0\partial_y\zeta^{n+\frac{1}{2}}\\
\frac{1}{\Delta t}\left(\bar{u}^{n+1}-\bar{u}^{n}\right) & = & -u_0\partial_x\bar{u}^{n+1,*}-v_0\partial_y\bar{u}^{n+1,*}+f\bar{v}^{n+\frac{1}{2}}\\
 & & -g\,\partial_x\left(\alpha_1\zeta^{n+1}+\alpha_2\zeta^{n+\frac{1}{2}}+\alpha_3\zeta^{n}\right)
\end{array}$$

(3.6)

Filtrage :

$$\zeta^{n+\frac{1}{2}} \;\leftarrow\; a\zeta^{n+\frac{1}{2}}+\tfrac{1}{2}(1-a)\left(\zeta^{n+1}+\zeta^{n}\right)$$

Nous noterons par ailleurs $X^n=(\zeta^n,\bar{u}^n,\bar{v}^n)$ le vecteur solution au temps $t^n=n\Delta t$. Le schéma numérique linéarisé (3.5)–(3.6) peut se mettre sous la forme :

$$X^{n+1} \;=\; G\,X^{n} \tag{3.7}$$

où la matrice G est appelée matrice d'amplification.

3.1.5 Schéma 1D pour l'analyse numérique

Comme expliqué en introduction de cette partie, nous effectuerons l'analyse numérique du schéma ADI en deux parties. Dans un premier temps, nous nous intéressons à l'application du schéma à la résolution d'une composante 1D des équations. Le terme de Coriolis n'est donc tout d'abord pas pris en compte mais fera l'objet d'une étude particulière par la suite.

Comme le schéma résout les colonnes et les lignes de manière alternée avec le même schéma, l'analyse dans une direction reste valable dans l'autre. Nous nous concentrons donc uniquement sur la résolution des lignes. Pour cela, on pose $\bar{v}\equiv 0$ pour tout temps et $v_0=0$. Il ne reste alors des équations linéarisées (3.4) que :

$$\left\{\begin{array}{rcl}
\partial_t\zeta \;+\; h_0\partial_x\bar{u} \;+\; u_0\partial_x\zeta &=& 0\\
\partial_t\bar{u} \;+\; u_0\partial_x\bar{u} \;+\; g\partial_x\zeta &=& 0
\end{array}\right. \tag{3.8}$$

La restriction du schéma numérique linéarisé (3.5–3.6) à ces équations 1D s'écrit alors :

$$
\begin{array}{lcl}
\zeta^{n-\frac{1}{2},c} & = & a\zeta^{n-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}(1-a)\left(\zeta^{n} + \zeta^{n-1,c}\right) \\
\zeta^{n+\frac{1}{2}} & = & \zeta^{n} - \frac{1}{2}\Delta t h_0\, \partial_x \bar{u}^{n} - \frac{1}{2}\Delta t u_0 \partial_x \zeta^{n} \\
\zeta^{n,c} & = & a\zeta^{n} + \frac{1}{2}(1-a)\left(\zeta^{n+\frac{1}{2}} + \zeta^{n-\frac{1}{2},c}\right) \\
\underline{\text{Prédicteur :}} & & \\
\frac{2}{\Delta t}\left(\zeta^{n+1,*} - \zeta^{n+\frac{1}{2}}\right) & = & -h_0\, \partial_x \bar{u}^{n+1,*} - u_0 \partial_x \zeta^{n+\frac{1}{2}} \\
\frac{1}{\Delta t}\left(\bar{u}^{n+1,*} - \bar{u}^{n}\right) & = & -u_0 \partial_x \bar{u}^{n} - g\, \partial_x\left(\alpha_1 \zeta^{n+1,*} + \alpha_2 \zeta^{n+\frac{1}{2}} + \alpha_3 \zeta^{n,c}\right) \\
\underline{\text{Correcteur :}} & & \\
\frac{2}{\Delta t}\left(\zeta^{n+1} - \zeta^{n+\frac{1}{2}}\right) & = & -h_0\, \partial_x \bar{u}^{n+1} - u_0 \partial_x \zeta^{n+\frac{1}{2}} \\
\frac{1}{\Delta t}\left(\bar{u}^{n+1} - \bar{u}^{n}\right) & = & -u_0 \partial_x \bar{u}^{n+1,*} - g\, \partial_x\left(\alpha_1 \zeta^{n+1} + \alpha_2 \zeta^{n+\frac{1}{2}} + \alpha_3 \zeta^{n,c}\right)
\end{array}
\tag{3.9}
$$

L'analyse numérique de ce schéma appliqué à une composante zonale est présentée en détails dans la partie 3.2.

3.1.6 Schéma 2D pour l'analyse du terme de Coriolis

Pour l'analyse du traitement du terme de Coriolis par le schéma numérique, nous considérons une simplification des équations linéarisées (3.4), en ne retenant que les termes faisant intervenir la physique mise en œuvre :

$$
\left\{
\begin{array}{rcl}
\partial_t \bar{u} \; - \; f\,\bar{v} & = & 0 \\
\partial_t \bar{v} \; + \; f\,\bar{u} & = & 0
\end{array}
\right.
\tag{3.10}
$$

La restriction du schéma numérique linéarisé (3.5–3.6) à ces équations simplifiées s'écrit alors :

$$
\left\{
\begin{array}{lcl}
\frac{1}{\Delta t}\left(\bar{v}^{n+\frac{1}{2}} - \bar{v}^{n-\frac{1}{2}}\right) & = & -f\bar{u}^{n} \\
\frac{1}{\Delta t}\left(\bar{u}^{n+1} - \bar{u}^{n}\right) & = & f\bar{v}^{n+\frac{1}{2}}
\end{array}
\right.
\tag{3.11}
$$

L'analyse numérique de ce traitement du terme de Coriolis est présentée en détails dans la partie 3.3.

3.1.7 Analyse de von Neumann

L'analyse de von Neumann consiste à étudier le comportement du schéma numérique pour un mode de Fourier, c'est-à-dire une onde monochromatique. Nous regardons l'évolution entre deux pas de temps n et $n+1$ du vecteur :

$$X(\mathbf{x}, t) = \widehat{X}\, e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t)}$$

où $\mathbf{x} = (x, y)$ est le vecteur de position, $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$ est le vecteur d'onde, ω la pulsation et $\widehat{X} = \left(\hat{\zeta}, \hat{u}, \hat{v}\right)$ le vecteur des amplitudes. Au temps $t^n = n\Delta t$, on a $X^n = \hat{X}\, e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega n \Delta t)}$. Il en découle donc la relation :

$$X^{n+1} = e^{-i\omega\Delta t} X^n$$

c'est-à-dire que la quantité $\lambda_e = e^{-i\omega\Delta t}$ est valeur propre du système linéarisé (3.4). Par ailleurs, l'application du schéma numérique aux équations linéarisées donne $X^{n+1} = G\, X^n$. Nous allons donc comparer les valeurs propres λ_G de la matrice d'amplification G aux valeurs théoriques λ_e. Pour obtenir celles-ci, il faut calculer ω, c'est-à-dire établir la relation de dispersion $\omega(\mathbf{k})$ reliant la valeur du vecteur d'onde à celle de la pulsation. En introduisant un mode de Fourier dans l'équation (3.4), on obtient :

$$
\left\{
\begin{array}{rcl}
-i\omega\hat{\zeta} \; + \; ih_0 k_x \hat{u} \; + \; ih_0 k_y \hat{v} \; + \; i(u_0 k_x + v_0 k_y)\hat{\zeta} & = & 0 \\
-i\omega\hat{u} \; + \; i(u_0 k_x + v_0 k_y)\hat{u} \; - \; f\hat{v} \; + \; igk_x\hat{\zeta} & = & 0 \\
-i\omega\hat{v} \; + \; i(u_0 k_x + v_0 k_y)\hat{v} \; + \; f\hat{u} \; + \; igk_y\hat{\zeta} & = & 0
\end{array}
\right.
$$

En notant $\mathbf{u}_0 = (u_0, v_0)^T$ le vecteur vitesse, on a dans le cas général :

$$
\omega_{\,2\mathrm{D}} \; = \; \left|
\begin{array}{l}
\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{k} \\
\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{k} \pm \sqrt{g h_0 \|\mathbf{k}\|^2 + f^2}
\end{array}
\right.
\tag{3.12}
$$

Pour les équations 2D, nous avons donc 3 valeurs propres. Nous laissons de côté le terme de Coriolis qui fera l'objet d'une analyse à part et nous avons alors :

$$\begin{aligned} \lambda^{\pm}_{e,2D} &= e^{-i\left(\mathbf{Fr}\cdot\vec{\gamma} \pm \sqrt{\gamma_x^2+\gamma_y^2}\right)} \\ \lambda^{3}_{e,2D} &= e^{-i\,\mathbf{Fr}\cdot\vec{\gamma}} \end{aligned} \tag{3.13}$$

où $\mathbf{Fr} = (\frac{u_0}{c}, \frac{v_0}{c})^T$ est le vecteur de nombre de Froude et $\vec{\gamma} = c\,\mathbf{k}\Delta t = (\gamma_x, \gamma_y)^T$ est un vecteur de variables exprimées en radians. La troisième valeur propre correspond à un mode physique appelé discontinuité de contact. Dans le cas particulier d'une linéarisation des équations autour d'une vitesse nulle ($Fr = 0$), nous avons $\lambda^3_{e,2D} = 1$.

Pour les équations simplifiées 1D du système (3.8), la relation de dispersion se réduit à $\omega_{1\mathrm{D}} = (u_0 \pm \sqrt{gh_0})k_x$ et la troisième valeur propre disparaît. On a donc :

$$\lambda^{\pm}_{e,1D} = e^{-i\,(Fr_x \pm 1)\gamma_x} \tag{3.14}$$

Pour les équations simplifiées (3.10) utilisées pour l'analyse du terme de Coriolis, la relation de dispersion se réduit à $\omega_c = \pm f$ et les deux valeurs propres sont :

$$\lambda^{\pm}_{e,c} = e^{\pm i\,f\Delta t} \tag{3.15}$$

Nous allons donc comparer les valeurs propres λ_G de la matrice d'amplification G aux valeurs propres théoriques λ_e. En pratique, on peut mettre λ_G sous la forme complexe :

$$\lambda_G = \rho\, e^{-i\theta}$$

où ρ est appelé facteur d'amplification ou d'amortissement. Dans tous les cas, le module des valeurs propres théoriques λ_e est égal à 1, on doit donc s'attendre à ce que $\rho = 1$. Si $\rho > 1$, le schéma numérique amplifie les ondes ; il est donc instable. Par ailleurs, nous pourrons comparer $\arg(\lambda_G) = \theta$ à la phase attendue $\arg(\lambda_e) = \omega\Delta t$. Plus précisément, nous étudierons le rapport $R = \frac{\arg(\lambda_G)}{\arg(\lambda_e)}$.

Dans la partie suivante, nous allons nous intéresser au schéma numérique 1D, et l'on aura $X^n = \left(\zeta^n, \bar{u}^n\right)$. Nous ferons l'analyse numérique pour un mode de Fourier $X(x,t) = \hat{X}\, e^{i(kx-\omega t)}$ avec $\widehat{X} = \left(\hat{\zeta}, \hat{u}\right)$, en notant $k = k_x$.

3.2 Analyse 1D du schéma original de MARS

Dans cette partie, nous allons procéder à l'analyse numérique du schéma mis en œuvre dans le code MARS, pour une composante zonale. Nous nous intéresserons en particulier à l'ordre du schéma, ainsi qu'à ses propriété de stabilité et de dispersion.

3.2.1 Semi-discrétisation en espace du schéma 1D

Pour un mode de Fourier de nombre d'onde k donné, le système linéarisé 1D (3.9) se réécrit :

$$
\begin{array}{rcl}
\zeta^{n-\frac{1}{2},c} &=& a\zeta^{n-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}(1-a)\left(\zeta^{n} + \zeta^{n-1,c}\right) \\
\zeta^{n+\frac{1}{2}} &=& \left(1 - \frac{1}{2}iu_0k\Delta t\right)\zeta^{n} - \frac{1}{2}ih_0k\Delta t\,\bar{u}^{n} \\
\zeta^{n,c} &=& a\zeta^{n} + \frac{1}{2}(1-a)\left(\zeta^{n+\frac{1}{2}} + \zeta^{n-\frac{1}{2},c}\right) \\
\underline{\text{Prédicteur :}} & & \\
\zeta^{n+1,*} &=& \left(1 - \frac{1}{2}iu_0k\Delta t\right)\zeta^{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}ih_0k\Delta t\bar{u}^{n+1,*} \\
\bar{u}^{n+1,*} &=& (1 - iu_0k\Delta t)\,\bar{u}^{n} - igk\Delta t\Big(\alpha_1\zeta^{n+1,*} + \alpha_2\zeta^{n+\frac{1}{2}} + \alpha_3\zeta^{n,c}\Big) \\
\underline{\text{Correcteur :}} & & \\
\zeta^{n+1} &=& \left(1 - \frac{1}{2}iu_0k\Delta t\right)\zeta^{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}ih_0k\Delta t\bar{u}^{n+1} \\
\bar{u}^{n+1} &=& \bar{u}^{n} - iu_0k\Delta t\bar{u}^{n+1,*} - igk\Delta t\Big(\alpha_1\zeta^{n+1} + \alpha_2\zeta^{n+\frac{1}{2}} + \alpha_3\zeta^{n,c}\Big)
\end{array}
\tag{3.16}
$$

3.2.2 Forme matricielle et polynôme caractéristique

Il est possible de réécrire le système (3.16) sous forme matricielle :

$$
\begin{array}{rcl}
X^{n-\frac{1}{2},c} &=& G_{\bar{a}}X^{n} + G_aX^{n-\frac{1}{2}} + G_{\bar{a}}X^{n-1,c} \\
X^{n+\frac{1}{2}} &=& G_0\,X^{n} \\
X^{n,c} &=& G_{\bar{a}}X^{n+\frac{1}{2}} + G_aX^{n} + G_{\bar{a}}X^{n-\frac{1}{2},c} \\
G_1X^{n+1,*} &=& (G_2+G_3)X^{n+\frac{1}{2}} + G_4X^{n,c} \\
G_1X^{n+1} &=& G_2X^{n+\frac{1}{2}} + G_3X^{n+1,*} + G_4X^{n,c}
\end{array}
$$

en notant les matrices

$$
\begin{array}{rclrcl}
G_a &=& \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & G_{\bar{a}} &=& \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1-a) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
G_0 &=& \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2}iu_0k\Delta t & -\frac{1}{2}ih_0k\Delta t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & G_1 &=& \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}ih_0k\Delta t \\ i\alpha_1gk\Delta t & 1 \end{pmatrix} \\
G_2 &=& \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2}iu_0k\Delta t & 0 \\ -i\alpha_2gk\Delta t & 1 \end{pmatrix} & G_3 &=& \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -iu_0k\Delta t \end{pmatrix} \\
G_4 &=& \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -i\alpha_3gk\Delta t & 0 \end{pmatrix} & & &
\end{array}
$$

Par substitution, on obtient :

$$
\begin{array}{rcl}
X^{n,c} &=& \underbrace{\left(G_{\bar{a}}G_0 + G_a + G_{\bar{a}}^2\right)}_{G_5}X^{n} + G_{\bar{a}}^2X^{n-1,c} + \underbrace{G_{\bar{a}}G_aG_0}_{G_6}X^{n-1} \\
G_1X^{n+1} &=& \overbrace{\left[\left(G_2 + G_3G_1^{-1}(G_2+G_3)\right)G_0 + (G_3G_1^{-1}+I)G_4G_5\right]}^{G_7}X^{n} + \\
& & \underbrace{\left(G_3G_1^{-1}+I\right)G_4G_{\bar{a}}^2}_{G_8}X^{n-1,c} + \underbrace{\left(G_3G_1^{-1}+I\right)G_4G_6}_{G_9}X^{n-1}
\end{array}
$$

c'est-à-dire :

$$
\underbrace{\begin{pmatrix} G_1 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X^{n+1} \\ X^{n,c} \\ X^{n} \end{pmatrix}}_{A\qquad Y^{n+1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} G_7 & G_8 & G_9 \\ G_5 & G_{\bar{a}}^2 & G_6 \\ I & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X^{n} \\ X^{n-1,c} \\ X^{n-1} \end{pmatrix}}_{AG\qquad Y^{n}}
$$

Notons G la matrice d'amplification telle que $Y^{n+1} = G\,Y^n$. Nous allons déterminer ses valeurs propres : on a $det(G-\lambda I)=0 \Leftrightarrow det(AG-\lambda A)=0$. Or :

$$\begin{aligned} P(\lambda) \;=\; \det(AG-\lambda A) \;&=\; \begin{vmatrix} G_7-\lambda G_1 & G_8 & G_9 \\ G_5 & G_{\bar{a}}^2-\lambda I & G_6 \\ I & 0 & -\lambda I \end{vmatrix} \\ &=\; \begin{vmatrix} G_8 & G_9+\lambda G_7-\lambda^2 G_1 \\ G_{\bar{a}}^2-\lambda I & G_6+\lambda G_5 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Le polynôme caractéristique $P(\lambda)$ est de degré 6, mais la valeur $\lambda=0$ est une racine triple. Cela permet de le réduire à un polynôme de degré 3.

Posons $c=\sqrt{gh_0}$, $Fr=\frac{u_0}{c}$ et $\gamma = ck\Delta t$. La relation de dispersion $\omega_{\,1\mathrm{D}}$ permet d'écrire l'expression suivante :

$$\omega_{\,1\mathrm{D}}\Delta t \;=\; (Fr\pm 1)\,\gamma$$

Nous allons donc comparer les racines du polynôme $P(\lambda)$ avec les valeurs propres attendues $\lambda_e^{\pm} = e^{-i(Fr\pm 1)\gamma}$.

3.2.3 Ordre du schéma

Il semble très difficile de donner une expression analytique des racines de $P(\lambda)$ dans le cas général. Pour étudier leur comportement par rapport à $\lambda_e^{\pm}$, on peut étudier le développement en séries de $P(\lambda)$ autour de ces valeurs de référence :

$$P\big(\lambda_e^{\pm}\big) \;=\; \frac{1}{8}\,i\,\big((\alpha_1-\alpha_3)\pm\tfrac{1}{2}Fr\big)(a+1)(a-3)(Fr\pm 1)\;\gamma^3 \;+\; O\big(\gamma^4\big) \tag{3.17}$$

Lorsque l'on désactive le filtrage sur la surface libre ($a=1$), nous avons :

$$P\big(\lambda_e^{\pm}\big)_{[a=1]} \;=\; -\frac{1}{2}\,i\,\big((\alpha_1-\alpha_3)\pm\tfrac{1}{2}Fr\big)(Fr\pm 1)\;\gamma^3 \;+\; O\big(\gamma^4\big)$$

Nous voyons aisément que l'on ne peut pas annuler le terme en $O\big(\gamma^3\big)$ par un choix approprié des coefficients α_1 et α_3. Nous pouvons écrire un développement en série des racines du polynôme caractéristique. En plus des deux racines $\lambda_G^{\pm}$ correspondant aux modes physiques, il y a une troisième racine que l'on note λ_G^n et qui correspond à un mode numérique lié au filtrage. Elle s'annule lorsque l'on désactive celui-ci ($a=1$). Nous avons :

$$\begin{aligned} \lambda_e^{\pm} &= 1 - i\,(Fr\pm 1)\,\gamma - \tfrac{1}{2}(Fr\pm 1)^2\,\gamma^2 \;+\; O\big(\gamma^3\big) \\ \lambda_G^{\pm} &= 1 - i\,(Fr\pm 1)\,\gamma - \tfrac{1}{4}(Fr\pm 1)\,\big(\tfrac{5}{2}Fr\pm(2+\alpha_1-\alpha_3)\big)\;\gamma^2 \;+\; O\big(\gamma^3\big) \\ \lambda_G^{n} &= \tfrac{1}{4}(a-1)^2 - \tfrac{1}{8}\,\alpha_3\,(a-1)^2\,\gamma^2 \;+\; O\big(\gamma^3\big) \end{aligned}$$

Aucun choix des paramètres a, α_1 et α_3 ne permet d'obtenir une bonne approximation de $\lambda_G^{\pm}$ à l'ordre 2 pour un nombre de Froude non–nul.

Cas limite où $Fr=0$: Dans le cas d'une linéarisation autour d'une vitesse nulle, le schéma a des propriétés supplémentaires. On a :

$$\begin{aligned} \lambda_{e\,[Fr=0]}^{\pm} &= 1 \pm i\,\gamma - \tfrac{1}{2}\,\gamma^2 \mp \tfrac{1}{6}i\,\gamma^3 + \tfrac{1}{24}\,\gamma^4 \pm \tfrac{1}{120}i\,\gamma^5 \;+\; O\big(\gamma^6\big) \\ \lambda_{G\,[Fr=0]}^{\pm} &= 1 \pm i\,\gamma - \tfrac{1}{2}\,\big(1+\tfrac{1}{2}(\alpha_1-\alpha_3)\big)\,\gamma^2 \\ &\quad \mp \tfrac{1}{8}\,i\,\big(1+3\alpha_1-\alpha_3+\tfrac{1}{4}(\alpha_1-\alpha_3)^2+\tfrac{1}{2}\alpha_3(a-1)^2\big)\,\gamma^3 \\ &\quad + \tfrac{1}{4}\big(\alpha_1+\tfrac{1}{2}\big(\alpha_1+\tfrac{1}{4}\alpha_3(a-1)^2\big)(\alpha_1-\alpha_3)\big)\,\gamma^4 + O\big(\gamma^5\big) + O\big((a-1)^4\big) \end{aligned}$$

Si l'on choisit $\alpha_1=\alpha_3$, alors le schéma devient d'ordre 2. Avec la valeur particulière $\alpha_1=\alpha_3=\frac{1}{6}$ et si le filtrage est désactivé ($a=1$) alors le schéma devient d'ordre 4 :

$$\lambda_{G\,[Fr=0,a=1]}^{\pm} \;=\; 1 \pm i\,\gamma - \tfrac{1}{2}\,\gamma^2 \mp \tfrac{1}{6}i\,\gamma^3 + \tfrac{1}{24}\,\gamma^4 \pm \tfrac{1}{96}i\,\gamma^5 \;+\; O\big(\gamma^6\big)\;.$$

Résumé

Le schéma est globalement d'ordre 1. Lorsque le nombre de Froude est nul, le choix de paramètres $\alpha_1=\alpha_3$ permet d'obtenir l'ordre 2, et dans ce cas, l'ordre 4 est atteint pour la valeur $\alpha_1=\alpha_3=\frac{1}{6}$ et en désactivant le filtrage ($a=1$).

3.2.4 Stabilité

Nous cherchons maintenant à connaître les conditions sur les valeurs des paramètres permettant une stabilité conditionnelle du schéma numérique. Un développement en séries du module des racines du polynôme caractéristique permet d'obtenir des informations sur ce point. Nous avons :

$$|\lambda_G^{\pm}| \;=\; 1 - \tfrac{1}{4}(Fr \pm 1)\big(\tfrac{1}{2}Fr \pm (\alpha_1 - \alpha_3)\big)\,\gamma^2 \;+\; O\big(\gamma^4\big) \tag{3.18}$$

$$|\lambda_G^{n}| \;=\; \tfrac{1}{4}(a-1)^2 - \tfrac{1}{8}\,\alpha_3 (a-1)^2\,\gamma^2 \;+\; O\big(\gamma^4\big) \;+\; O\big((a-1)^3\big) \tag{3.19}$$

Nous souhaitons déterminer les valeurs des paramètres α_1 et α_3 permettant de rendre négatif le terme en $O\big(\gamma^2\big)$ dans (3.18). Ceci est possible sous la condition nécessaire de stabilité suivante :

$$\alpha_1 \;>\; \alpha_3 + \frac{1}{2}\,|Fr| \tag{3.20}$$

Cette relation est indépendante de la valeur du paramètre a. L'effet du filtrage n'intervient dans le développement (3.18) que dans le terme en $O(\gamma^4)$. Par ailleurs, si le filtrage est modéré, c'est-à-dire que le paramètre a est proche de 1, le module du mode numérique reste borné et cela ne pose pas de problème de stabilité.

|| On remarque que le choix de paramètre $\alpha_1 = \alpha_3$ est instable dès que le nombre de Froude n'est pas nul.

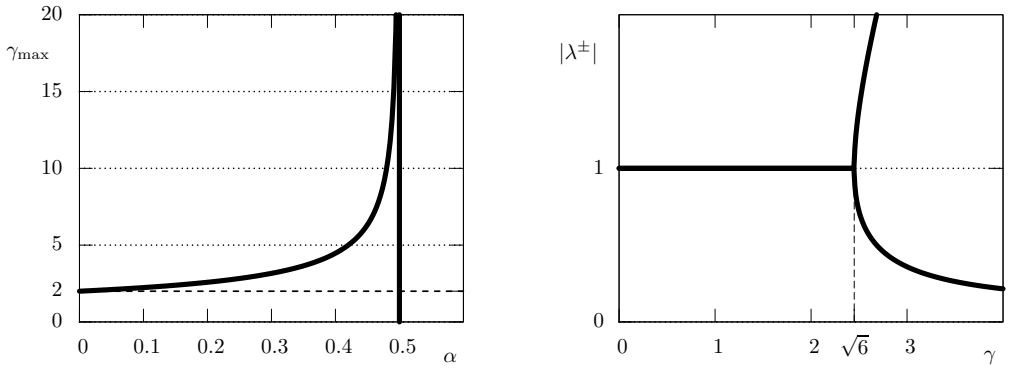
Cas limite où $Fr = 0$: Dans le cas d'une linéarisation autour d'une vitesse nulle, la condition de stabilité (3.20) $\alpha_1 > \alpha_3$. Intéressons nous au cas limite $\alpha_1 = \alpha_3 = \alpha$. Si l'on désactive le filtrage ($a = 1$), on peut alors obtenir une expression assez simple du module des valeurs propres :

$$\big|\lambda_G^{\pm}\big|_{[Fr=0,a=1]} \;=\; \begin{array}{ll} 1 & \text{si } \alpha \geq \frac{1}{2} \\ 1 & \text{si } \alpha < \frac{1}{2} \text{ et } \gamma \leq \frac{2}{\sqrt{1-2\alpha}} \\ \left|1 - \dfrac{\gamma^2 \pm \gamma\sqrt{\gamma^2(1-2\alpha)-4}}{2+\alpha\gamma^2}\right| & \text{si } \alpha < \frac{1}{2} \text{ et } \gamma > \frac{2}{\sqrt{1-2\alpha}} \end{array} \tag{3.21}$$

Si $\alpha < \frac{1}{2}$ et $\gamma > \frac{2}{\sqrt{1-2\alpha}}$, alors on peut écrire un développement en séries du module de $\lambda_G^{\pm}$ dans un voisinage de $\gamma = \frac{2}{\sqrt{1-2\alpha}}$ en posant $x = \gamma - \frac{2}{\sqrt{1-2\alpha}}$. On a alors :

$$\big|\lambda_G^{\pm}\big|_{[Fr=0,a=1]} \;=\; 1 \;\pm\; 2\,(1-2\alpha)^{\frac{3}{4}}\sqrt{x} \;+\; 2\,(1-2\alpha)^{\frac{3}{2}}x \;+\; O\big(x^{\frac{3}{2}}\big)$$

On voit alors que comme $\alpha < \frac{1}{2}$, une des deux racines a un module supérieur à l'unité lorsque $\gamma > \gamma_{\max} = \frac{2}{\sqrt{1-2\alpha}}$. Le schéma est alors instable. Sur la figure 3.1 (a), la limite de stabilité $\gamma_{\max}$ est tracée en fonction de la valeur du coefficient α.



(a) Limite de stabilité $\gamma_{\max}$ en fonction de la valeur du paramètre α

(b) Module de $|\lambda^{\pm}|$ en fonction de $\gamma = c\,k\Delta t$ pour $\alpha = \frac{1}{6}$

FIG. 3.1 – Stabilité du schéma original de MARS : cas limite où $Fr = 0$.

Avec $\alpha_1 = \alpha_3 \geq \frac{1}{2}$, on obtient la stabilité maximale, inconditionnelle. Le choix de paramètre $\alpha_1 = \alpha_3 = \frac{1}{6}$, permettant d'atteindre l'ordre 4 lorsque $Fr = 0$, est soumis à la contrainte de stabilité : $\gamma < \sqrt{6} \simeq 2.45$. Pour ce cas particulier, le module des valeurs propres $\lambda^{\pm}$ est tracé en fonction de $\gamma = c\,k\Delta t$ sur la figure 3.1 (b).

Dans le cas où le filtrage est activé et que l'on garde la condition $\alpha_1 = \alpha_3 = \alpha$ pour assurer l'ordre 2, un développement en séries du module des racines $\lambda_G^{\pm}$ montre que le filtrage a un effet amortissant :

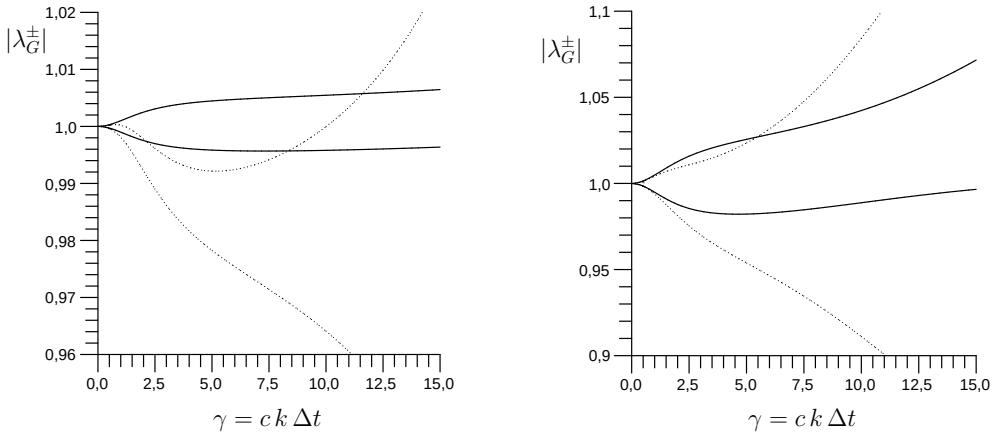
$$|\lambda_G^{\pm}|_{[Fr=0]} \;=\; 1 - \tfrac{1}{32}\,\alpha\,(a-1)^2\big(2+(a-1)^2\big)\,\gamma^4 \;+\; O\big(\gamma^6\big) \;+\; O\big((a-1)^6\big)$$

Le terme en $O\big(\gamma^4\big)$ est toujours négatif lorsque $\alpha > 0$.

Influence du filtrage : Nous avons vu que l'influence du filtrage sur la stabilité du schéma numérique apparaît uniquement à l'ordre 4 : dans le développement en séries de γ du module des valeurs propres physiques $\lambda_G^{\pm}$ (3.18), le paramètre de filtrage a n'intervient que dans le terme en $O\big(\gamma^4\big)$. Lorsque le nombre de Froude est non-nul, cette influence est complètement masquée par le terme en $O\big(\gamma^2\big)$ qui ne dépend pas du coefficient a.

Nous avons vu également que pour un nombre de Froude nul, lorsque $\alpha_1 = \alpha_3 > 0$, le filtrage a un effet dissipatif à l'ordre 4. Ainsi, lorsque le nombre de Froude est très faible, cet effet dissipatif peut contribuer à stabiliser le schéma numérique.

Pour illustrer ce propos, la figure 3.2 montre le module des valeurs propres $\lambda_G^{\pm}$ en fonction de la variable $\gamma = c\,k\Delta t$, dans le cas où $\alpha_1 = \alpha_3 = \frac{1}{2}$. Les courbes en trait continu correspondent au cas sans filtrage ($a = 1$), tandis que celles en pointillés correspondent à une valeur du coefficient $a = 0.8$. La figure 3.2 (a) correspond à un nombre de Froude $Fr = \frac{1}{100}$ tandis que la figure 3.2 (b) correspond à un nombre de Froude $Fr = \frac{1}{20}$.



(a) $Fr = \frac{1}{100}$ (b) $Fr = \frac{1}{20}$

FIG. 3.2 – Comparaison de la stabilité avec/sans filtrage.

Nous pouvons observer que pour un nombre de Froude très petit, le filtrage a bien un effet bénéfique sur la stabilité du schéma. Cependant, cet effet est rapidement dominé par le caractère instable du terme en $O(\gamma^2)$ dans le développement (3.18). Quand le nombre de Froude augmente, l'effet du filtrage n'est plus suffisant pour assurer une limite de stabilité.

Résumé

La stabilité du schéma est soumise à une condition nécessaire (mais pas suffisante) sur la valeur des paramètres α_i. Elle s'écrit $\alpha_1 > \alpha_3 + \frac{1}{2}\,|Fr|$. Lorsque le nombre de Froude est nul et le filtrage désactivé, le cas limite $\alpha_1 = \alpha_3 = \alpha$ rend le schéma inconditionnellement stable si $\alpha \geq \frac{1}{2}$ et conditionnellement stable si $\alpha < \frac{1}{2}$. La limite de stabilité s'écrit alors $\gamma < \frac{2}{\sqrt{1-2\alpha}}$. Par ailleurs, le filtrage n'a un effet notable sur la stabilité que pour les nombres de Froude très petits.

3.2.5 Dispersion

Nous allons maintenant étudier la vitesse de phase du schéma numérique et la comparer à celle attendue. La vitesse de phase est définie à partir de la relation de dispersion par $c_p = \frac{\omega(k)}{k}$ (voir partie 3.1.7). Pour les équations qui nous concernent ici, la valeur théorique de la vitesse de phase est :

$$c_{p,e}^{\pm} \;=\; \frac{\omega_{1\mathrm{D}}^{\pm}(k)}{k} \;=\; (Fr \pm 1)\,c$$

Par ailleurs, la vitesse de phase du schéma numérique est donnée par :

$$c^{\pm}_{p,G} \;=\; \frac{\omega^{\pm}_G(k)}{k} \;=\; \frac{-\arg\left(\lambda^{\pm}_G\right)}{k\Delta t}\;.$$

Ainsi, on peut calculer le rapport entre la vitesse de phase attendue et la vitesse de phase numérique :

$$R^{\pm} \;=\; \frac{c^{\pm}_{p,G}}{c^{\pm}_{p,e}} \;=\; \frac{-\arg\left(\lambda^{\pm}_G\right)}{(Fr\pm 1)\gamma} \tag{3.22}$$

Un développement en séries de l'argument des valeurs propres du polynôme caractéristique donne :

$$\arg\left(\lambda^{\pm}_G\right) \;=\; -(Fr\pm 1)\,\gamma\left(1+e^{\pm}_D\,\gamma^2\right) \;+\; O\big(\gamma^4\big)$$

où $e^{\pm}_D$ est l'erreur de dispersion d'ordre 2. Elle s'écrit de manière générale :

$$e^{\pm}_D \;=\; \frac{1}{24}-\frac{1}{8}(\alpha_1+\alpha_3)-\frac{1}{32}(\alpha_1-\alpha_3)^2-\frac{1}{16}\alpha_3(1-a)^2 \;+\; O\big(Fr\big) \tag{3.23}$$

On remarque que lorsque $Fr=0$ et que le filtrage est désactivé ($a=1$), le choix de paramètres $\alpha_1=\alpha_3=\frac{1}{6}$ permettant d'obtenir l'ordre 4 annule le terme d'erreur de dispersion d'ordre 2. Lorsque $\alpha_1=\alpha_3>\frac{1}{6}$, ce dernier est toujours négatif. Cela correspond à un ralentissement des ondes. En particulier, pour $\alpha_1=\alpha_3=\frac{1}{2}$, nous avons $e^{\pm}_D=-\frac{1}{12}$.

On remarque également dans l'expression (3.23) que l'activation du filtrage ($a\neq 1$) accentue ce ralentissement si $\alpha_3>0$.

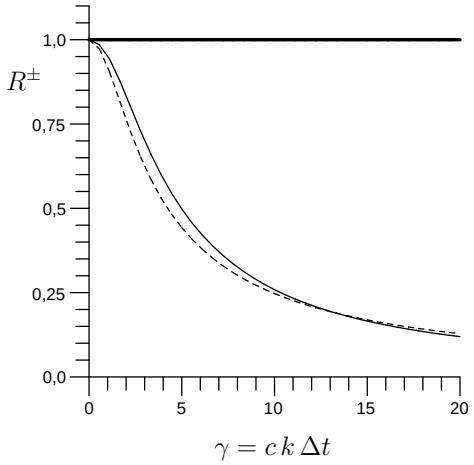


FIG. 3.3 – Arguments des deux valeurs propres en fonction de $\gamma = c\,k\Delta t$ pour $Fr=0.2$.

Sur la figure 3.3 est tracé, en fonction de γ, le rapport $R^{\pm}$ entre l'argument des valeurs propres de la matrice d'amplification et celui des valeurs propres attendues (3.22). La ligne en trait gras correspond à la valeur idéale de ce rapport, c'est-à-dire une absence totale de dispersion ($R^{\pm}=1$). La ligne fine et celle en pointillés représentent la valeur effective de R^{+} et R^{-} pour un nombre de Froude de 0.2 et pour les valeurs de paramètres $\alpha_1=\alpha_3=\frac{1}{2}$. Nous observons que le ralentissement des ondes est très prononcé, même pour les plus grandes échelles spatiales (petites valeurs de γ).

Résumé Dans le cas général, le schéma numérique produit une erreur de dispersion d'ordre 2.

3.2.6 Cas limite $h_0 = 0$

Pour analyser la partie transport du schéma, nous étudions le cas limite d'une linéarisation autour d'une profondeur nulle ($h_0=0$). La relation de dispersion se réduit alors à $\omega(k)=u_0k$ et la valeur propre idéale s'écrit $\lambda_e=e^{-iu_0k\Delta t}$. Les équations linéarisées 1D (3.8) se simplifient de la manière suivante :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \partial_t\zeta \;+\; u_0\partial_x\zeta &=& 0 \\ \partial_t\bar{u} \;+\; u_0\partial_x\bar{u} &=& 0 \end{array}\right. \tag{3.24}$$

Quant au schéma numérique 1D (3.16), il devient :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \zeta^{n+1} & = & \left(1 - \frac{1}{2} i u_0 k \Delta t\right)^2 \zeta^n \\ \bar{u}^{n+1} & = & \left(1 - i u_0 k \Delta t - u_0^2 k^2 \Delta t^2\right) \bar{u}^n \end{array} \right. \tag{3.25}$$

Nous voyons que le traitement des variables d'état est explicite d'ordre 1, ce qui correspond théoriquement à un schéma instable. Le développement en séries des valeurs propres de la matrice d'amplification G s'écrit :

$$\begin{array}{lcl} \lambda_{e\,[h_0=0]}^{\pm} & = & 1 - i\,u_0\,k\Delta t - \frac{1}{2}\,u_0^2\,k^2\Delta t^2 \;+\; O\big(k^3\Delta t^3\big) \\ \lambda_{G\,[h_0=0]}^{+} & = & 1 - i\,u_0\,k\Delta t - \frac{1}{4} u_0^2\,k^2\Delta t^2 \\ \lambda_{G\,[h_0=0]}^{-} & = & 1 - i\,u_0\,k\Delta t - u_0^2\,k^2\Delta t^2 \;, \end{array}$$

Nous vérifions ici l'ordre 1 du schéma. Le développement en séries du module des valeurs propres donne :

$$\begin{array}{lcl} \left|\lambda_G^{+}\right|_{[h_0=0]} & = & 1 + \frac{1}{4} u_0^2\,k^2\Delta t^2 \\ \left|\lambda_G^{-}\right|_{[h_0=0]} & = & 1 - \frac{1}{2} u_0^2\,k^2\Delta t^2 \;+\; O\big(k^3\Delta t^3\big) \;, \end{array}$$

ce qui montre une instabilité inconditionnelle. Dans le cas général ($h_0 > 0$), c'est également le traitement explicite du terme de transport qui explique la non–stabilité du schéma lorsque le nombre de Froude est non–nul.

En ce qui concerne la dispersion, on attend que l'argument des racines du polynôme caractéristique corresponde à la valeur exacte :

$$arg(\lambda_e^{\pm})_{[h_0=0]} \;=\; -u_0\,k\Delta t.$$

Mais un développement en séries de l'argument des valeurs propres de la matrice d'amplification G donne :

$$\begin{array}{lcl} arg\big(\lambda_G^{+}\big)_{[h_0=0]} & = & -u_0\left(1 - \frac{1}{12} u_0^2\,k^2\Delta t^2\right) k\Delta t \;+\; O\big(k\Delta t^4\big) \\ arg\big(\lambda_G^{-}\big)_{[h_0=0]} & = & -u_0\left(1 + \frac{2}{3} u_0^2\,k^2\Delta t^2\right) k\Delta t \;+\; O\big(k\Delta t^4\big) \end{array} \tag{3.26}$$

On observe donc une erreur de dispersion d'ordre 2, comme dans le cas général.

3.2.7 Comparaison avec le schéma de ROMS

Nous allons rapidement comparer, dans le cas limite d'un nombre de Froude nul, les propriétés du schéma de MARS présentées dans cette partie avec celles du schéma du modèle ROMS (Shchepetkin and McWilliams, 2005) pour le mode barotrope. Celui-ci repose sur une méthode de *time-splitting* qui consiste à résoudre le mode barocline sur un grand pas de temps Δt et le mode barotrope sur une subdivision de celui-ci en M petits pas de temps $\frac{\Delta t}{M}$. Les variables barotropes sont ensuite filtrées à l'aide d'une moyenne temporelle sur le pas de temps barocline Δt :

$$\langle\zeta\rangle^{n+1} \;=\; \sum_{m=1}^{M*} a_m\,\zeta^m \;, \qquad \langle\bar{u}\rangle^{n+1} \;=\; \sum_{m=1}^{M*} a_m\,\bar{u}^m \tag{3.27}$$

où $\langle X\rangle^{n+1}$ est la valeur de la variable X au nouveau pas de temps barocline et X^m sa valeur instantanée au pas de temps barotrope. On pose $X^0 = \langle X\rangle^n$. Les poids a_m sont choisis de manière à préserver les deux premiers moments de la distribution. Ici, nous considérons une fenêtre de filtrage en forme de cosinus :

$$a_m \;=\; \left\{ \begin{array}{ll} \frac{2}{M}\cos^2\left(\frac{m\,\pi}{M}\right) & \text{pour } \frac{M}{2} \le m \le \frac{3M}{2} \\ 0 & \text{sinon}\,. \end{array} \right. \tag{3.28}$$

On a donc ici $M^* = \frac{3M}{2}$. Le mode barotrope est calculé à l'aide du schéma LF-AM3, composé d'un prédicteur de type Leap-Frog et d'un correcteur de type Adams-Moulton d'ordre 3 :

$$\begin{array}{ll} (P) & \left\{ \begin{array}{lcl} \zeta^{m+1,*} & = & \zeta^{m-1} - 2ih_0 k\Delta t\,\bar{u}^m \\ \bar{u}^{m+1,*} & = & \bar{u}^{m-1} - 2igk\Delta t\,\bar{\zeta}^m \end{array} \right. \\ (C) & \left\{ \begin{array}{lcl} \zeta^{m+1} & = & \zeta^m - 2ih_0 k\Delta t\,\left(\frac{5}{12}\bar{u}^{m+1,*} + \frac{2}{3}\bar{u}^m - \frac{1}{12}\bar{u}^{m-1}\right) \\ \bar{u}^{m+1} & = & \bar{u}^m - 2igk\Delta t\,\left(\frac{5}{12}\zeta^{m+1,*} + \frac{2}{3}\zeta^m - \frac{1}{12}\zeta^{m-1}\right) \end{array} \right. \end{array} \tag{3.29}$$

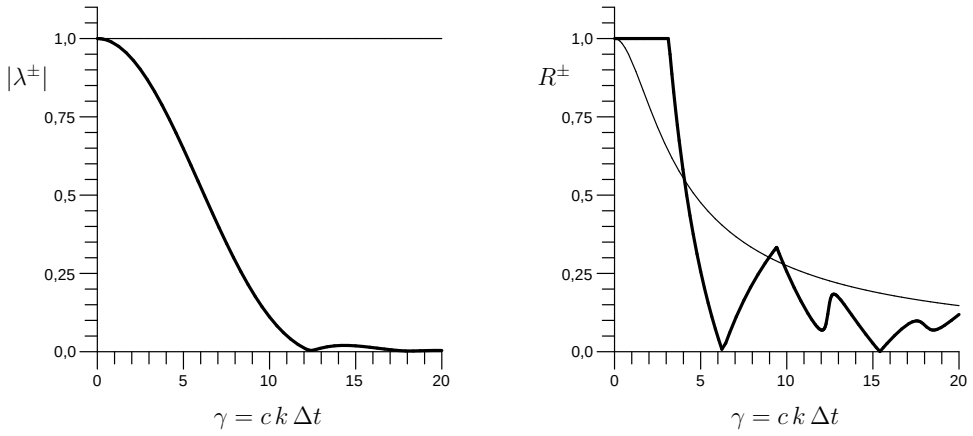
Ordre

Bien que le schéma LF-AM3 soit d'ordre 3, le filtrage (3.27) a pour effet de réduire l'ordre du schéma général strictement à un. Cependant l'erreur sur le terme d'ordre 2 est faible, d'environ 3%. Nous pouvons donc dire que l'ordre du schéma est proche de 2.

Stabilité

La stabilité du schéma LF-AM3 pour un pas de temps barotrope est assurée pour $\frac{\gamma}{M} < 1.5874$ (*cf.* (Shchepetkin and McWilliams, 2005, Appendix A.)). Pour un pas de temps barocline, la méthode de filtrage du mode barotrope permet de repousser cette limite à volonté en choisissant M suffisament grand.

La figure 3.4 (a) montre le module des valeurs propres de la matrice d'amplification pour les schémas barotrope de ROMS (trait gras, avec $M=20$) et de MARS (trait fin) en fonction de γ, pour un nombre de Froude nul. Le schéma de MARS ne produit pas d'amortissement, quelque soit l'échelle de résolution. En revanche, le schéma de ROMS amortit rapidement les petites échelles.



(a) Module (b) Argument

FIG. 3.4 – Comparaison des schémas numérique de ROMS et MARS pour le mode barotrope : module et argument relatif des valeurs propres de la matrice d'amplification. $Fr = 0$. Ligne en gras : ROMS, ligne fine : MARS.

Dispersion

Écrivons un développement en séries de γ de l'argument des valeurs propres de la matrice d'amplification. Nous avons alors :

$$\arg\left(\lambda^{\pm}_{\text{ROMS}}\right)_{[Fr=0]} \;=\; \mp\,\gamma\left(1 + e^{\pm}_{D}\,\gamma^{4}\right) \;+\; O\big(\gamma^{7}\big) \tag{3.30}$$

Le schéma présente donc une erreur de dispersion d'ordre 4, dont un développement en séries de $\frac{1}{N}$ s'écrit de la manière suivante :

$$e^{\pm}_{D} \;=\; -\frac{7}{864\,M^{3}}\left(1 - \tfrac{6}{\pi^{2}}\right) \;+\; O\left(\frac{1}{M^{4}}\right)$$

Pour $M = 20$, l'erreur de dispersion est donc environ $-4.10^{-7}\,\gamma^{4}$ pour les petites valeurs de γ, ce qui est très faible.

Sur la figure 3.4 (b) est tracé, en fonction de γ, le rapport $R^{\pm}$ entre l'argument des valeurs propres de la matrice d'amplification et celui des valeurs propres attendues (3.22). Le schéma de MARS ralentit fortement les ondes, d'autant plus que les échelles considérées sont petites. Le schéma de ROMS quant à lui, est très bon aux grandes échelles, puis les ondes sont très vite ralenties pour $\gamma > 3$.

Conclusion

Avec un choix de paramètres permettant d'atteindre l'ordre 2 (*i.e.* $\alpha_1 = \alpha_3$), le schéma numérique de MARS n'amortit aucune des échelles de résolution. Pour la valeur $\alpha_1 = \alpha_3 = \frac{1}{2}$ assurant le maximum de stabilité à Froude nul, le schéma cause une dispersion importante des ondes, qui sont ralenties fortement aux petites échelles d'espace.

Sans atteindre exactement l'ordre 2, le schéma numérique de ROMS ne disperse quasiment pas les grandes échelles jusqu'à $\gamma = 3$ environ. Pour les plus petites échelles, les ondes sont fortement ralenties mais ceci est masqué par le fait qu'elles sont alors bien amorties.

3.2.8 Conclusion

Nous avons présenté dans cette partie une analyse du schéma numérique du code MARS pour la résolution du mode barotrope. Dans le cas général, il s'agit d'un schéma d'ordre 1. Dans le cas limite où le nombre de Froude est nul, on peut atteindre l'ordre 2 sous la simple condition $\alpha_1 = \alpha_3$ et l'ordre 4 en imposant la valeur de ces paramètres à $\frac{1}{6}$ et en désactivant le filtrage. Cependant, dans ce dernier cas, la stabilité n'est assurée que sous une condition contraignante sur le pas de temps.

Dans le cas général où le nombre de Froude n'est pas nul, nous avons mis en évidence une condition sur le choix des paramètres α_i, nécessaire pour assurer la stabilité mais pas suffisante. Celle-ci fait intervenir le nombre de Froude : $\alpha_1 > \alpha_3 + \frac{1}{2}|Fr|$. Ceci conduit à un schéma d'ordre 1 en temps. Le choix de paramètres $\alpha_1 = \alpha_3$, correspondant à un schéma d'ordre 2 pour un Froude nul, conduit, dans le cas d'un Froude *non* nul, à un schéma inconditionnellement instable dans le cas général. L'activation du filtrage ne permet d'améliorer un peu la stabilité que pour les très petits nombres de Froude.

Ce défaut de stabilité du schéma est lié au traitement explicite des termes de transport dans la résolution du mode barotrope. Par ailleurs, le schéma est très dispersif dans le cas général avec une erreur de dispersion d'ordre 2.

3.3 Analyse du terme de Coriolis

Dans cette partie, nous allons procéder à l'analyse numérique du traitement du terme de Coriolis mis en œuvre dans le code MARS. À l'image de ce qui a été fait dans la partie précédente, nous regarderons l'ordre du schéma numérique, ainsi que ses propriété de stabilité et de dispersion.

3.3.1 Forme matricielle et polynôme caractéristique

Nous avons présenté dans la partie 3.1.6 une simplification des équations 2D du mode barotrope ne prenant en compte que la modélisation du terme de Coriolis. Le schéma numérique de MARS pour le mode 2D appliqué à ce modèle simplifié est donné en (3.11). Il peut se réécrire de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \bar{v}^{n+\frac{1}{2}} & = & \bar{v}^{n-\frac{1}{2}} \; - \; f\Delta t\, \bar{u}^n \\ \bar{u}^{n+1} & = & \bar{u}^n \; + \; f\Delta t\, \bar{v}^{n+\frac{1}{2}} \end{array} \right.$$

ou encore, par substitution :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \bar{u}^{n+1} & = & \Big(1-(f\Delta t)^2\Big)\, \bar{u}^n \; + \; f\Delta t\, \bar{v}^{n-\frac{1}{2}} \\ \bar{v}^{n+\frac{1}{2}} & = & -f\Delta t\, \bar{u}^n \; + \; \bar{v}^{n-\frac{1}{2}} \end{array} \right. \tag{3.31}$$

En posant $X^n = \big(\bar{u}^n, \bar{v}^{n-\frac{1}{2}}\big)$, il est possible de réécrire le système (3.31) sous forme matricielle :

$$X^{n+1} \; = \; \underbrace{\left(\begin{array}{cc} 1-(f\Delta t)^2 & f\Delta t \\ -f\Delta t & 1 \end{array} \right)}_{G} X^n \tag{3.32}$$

Les valeurs propres de la matrice d'amplification G sont les racines du polynôme caractéristique $P(\lambda) = det(G - \lambda I)$ qui s'écrit :

$$P(\lambda) \; = \; \lambda^2 + \Big((f\Delta t^2) - 2\Big)\, \lambda + 1 \; .$$

Nous les noterons $\lambda_G^{\pm}$ et comparerons leurs propriétés aux valeurs propres attendues notées $\lambda_e^{\pm}$. Le calcul de leur expression est expliqué dans la partie 3.1.7 et nous avons :

$$\lambda_e^{\pm} \; = \; e^{-i\omega_c \Delta t} \; = \; e^{\pm i f \Delta t} \tag{3.33}$$

$$\lambda_G^{\pm} \; = \; 1 - \frac{1}{2}(f\Delta t)^2 \pm |f\Delta t| \sqrt{(f\Delta t)^2 - 4} \tag{3.34}$$

L'expression de $\lambda_G^{\pm}$ n'est pas dérivable pour $f = 0$. Dans la suite, nous laisserons donc ce cas particulier de côté.

3.3.2 Ordre du schéma

Un développement en séries des valeurs propres attendues $\lambda_e^{\pm}$ et de celles de la matrice d'amplification G donne :

$$\begin{array}{rcl} \lambda_e^{\pm} & = & 1 \pm i f\Delta t - \frac{1}{2}(f\Delta t)^2 \pm \frac{1}{6} i (f\Delta t)^3 \; + \; O\big((f\Delta t)^4\big) \\ \lambda_G^{\pm} & = & 1 \pm i f\Delta t - \frac{1}{2}(f\Delta t)^2 \pm \frac{1}{8} i (f\Delta t)^3 \; + \; O\big((f\Delta t)^4\big) \end{array} \tag{3.35}$$

Nous observons donc que le schéma numérique est précis à l'ordre 2 pour le traitement du terme de Coriolis.

3.3.3 Stabilité

Pour analyser la stabilité du traitement du terme de Coriolis, nous étudions le module de $\lambda_G^{\pm}$. Un développement en séries donne :

$$\begin{array}{rcll} \big|\lambda_G^{\pm}\big| & = & 1 & \text{si } |f\Delta t| < 2 \\ & & \Big|1 - \frac{1}{2}(f\Delta t)^2 \pm \frac{1}{2}|f\Delta t| \sqrt{(f\Delta t)^2 - 4}\Big| & \text{si } |f\Delta t| > 2 \end{array} \tag{3.36}$$

Si $f\Delta t > 2$, alors on peut réécrire ce développement dans un voisinage de $f\Delta t = 2$ en posant $x = f\Delta t - 2$. Nous avons alors :

$$\left|\lambda_G^{\pm}\right| \;=\; 1 \;\pm\; 2\sqrt{x} \;+\; O(x) \tag{3.37}$$

On voit alors qu'une des deux racines a un module supérieur à l'unité dès que $f\Delta t > 2$. Le schéma est alors instable. Ceci est illustré sur la figure 3.5 où $|\lambda_G^{\pm}|$ est tracé en fonction de $f\Delta t$.

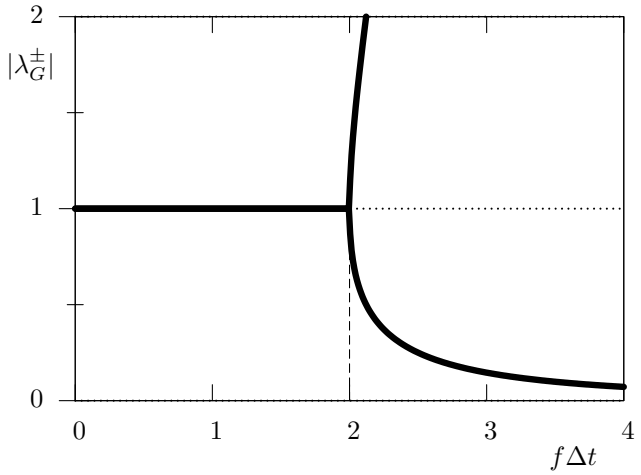


FIG. 3.5 – Stabilité du schéma numérique original de MARS pour le traitement du terme de Coriolis.

Nous avons donc la condition de stabilité suivante : $f\Delta t < 2$. Étant donné que le paramètre f est de l'ordre de $10^{-4}\, s^{-1}$, elle autorise des pas de temps Δt très grands, de l'ordre de $10^4\, s$.

3.3.4 Dispersion

Nous allons maintenant étudier la dispersion introduite par le traitement du terme de Coriolis. L'argument de la valeur propre attendue $\lambda_e^{\pm}$ est $\pm f\Delta t$. Nous allons le comparer avec l'argument des valeurs propres $\lambda_G^{\pm}$ de la matrice d'amplification, dont un développement en séries donne :

$$\arg\left(\lambda_G^{\pm}\right) \;=\; \pm\left(1 + \tfrac{1}{24}(f\Delta t)^2\right) f\Delta t \;+\; O\big((f\Delta t)^5\big) \tag{3.38}$$

Notons $R^{\pm}$ le rapport entre les arguments. Nous avons :

$$R^{\pm} \;=\; \frac{\arg\left(\lambda_G^{\pm}\right)}{\pm f\Delta t} \;=\; 1 + \tfrac{1}{24}(f\Delta t)^2 \;+\; O\big((f\Delta t)^4\big) \tag{3.39}$$

L'erreur de dispersion est donc d'ordre 2 et positive. Elle correspond donc à une accélération de la rotation numérique par rapport à la rotation physique liée à la force de Coriolis.

3.3.5 Conclusion

Le schéma numérique utilisé pour le traitement du terme de Coriolis est d'ordre 2. Il est stable sous la condition $f\Delta t < 2$, peu contraignante sur le pas de temps. L'amortissement des ondes est nul, c'est-à-dire que le module des valeurs propres de la matrice d'amplification est égal à 1 dans la zone de stabilité. Par ailleurs, le schéma produit une erreur de dispersion d'ordre 2 correspondant à une accélération de la rotation.

3.4 Analyse 2D du schéma original de MARS

Nous allons maintenant nous intéresser à l'analyse numérique du schéma barotrope bidimensionnel mis en œuvre dans le code MARS.

Pour cela, nous effectuons une analyse de Fourier du schéma 2D décrit en (3.5)–(3.6) page 60. Nous considérerons uniquement le cas où les coefficients pour le calcul du gradient de pression sont fixés aux valeurs $\alpha_1 = \alpha_3 = \frac{1}{2}$ et $\alpha_2 = 0$, et le filtrage de la surface libre est désactivé ($a = 1$). Par ailleurs, nous ne prenons pas en compte le terme de Coriolis qui est traité de manière séparée dans la partie 3.3.

Nous avons vu dans la partie 3.1.7 que pour les équations barotropes 2D, la relation de dispersion possède trois solutions et donc que la matrice d'amplification du schéma numérique possède trois valeurs propres dont les valeurs théoriques peuvent s'écrire de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \lambda_e^{\pm} &= e^{-i\left(\mathbf{Fr}\cdot\vec{\gamma} \pm \sqrt{\gamma_x^2+\gamma_y^2}\right)} \\ \lambda_e^{3} &= e^{-i\,\mathbf{Fr}\cdot\vec{\gamma}} \end{aligned}$$

où $\mathbf{Fr} = (\frac{u_0}{c}, \frac{v_0}{c})^T$ est le vecteur de nombre de Froude et $\vec{\gamma} = c\,\mathbf{k}\Delta t = (\gamma_x, \gamma_y)^T$ est un vecteur de variables exprimées en radians. Pour effectuer l'analyse 2D, nous définissons le vecteur d'onde $\mathbf{k} = (k_x, k_y)^T$ et le vecteur vitesse $\mathbf{u}_0 = (u_0, v_0)^T$ dans des coordonnées polaires :

$$k_x = k\,\cos\theta\,, \qquad k_y = k\,\sin\theta \tag{3.40}$$

$$u_0 = w\,\cos\theta\,, \qquad v_0 = w\,\sin\theta \tag{3.41}$$

où k et w sont leurs normes respectives ; ils sont donc colinéaires. On définit ensuite le nombre γ exprimé en radians et le nombre de Froude :

$$\gamma = c\,k\Delta t\,, \qquad Fr = \tfrac{w}{c}\,. \tag{3.42}$$

3.4.1 Stabilité

Le développement en séries des modules des trois valeurs propres est invariable par rapport à la direction d'analyse θ jusqu'à l'ordre 2 :

$$\begin{aligned} |\lambda_G^{\pm}| &= 1 - \tfrac{1}{8}Fr(Fr \pm 1)\,\gamma^2 \;+\; O\big(\gamma^4\big) \\ |\lambda_G^{3}| &= 1 - \tfrac{1}{2}Fr^2\gamma^2 \;+\; O\big(\gamma^4\big) \end{aligned}$$

Nous observons que le diagnostic ne change pas par rapport à l'analyse 1D faite dans la partie 3.2.4 : le module de la valeur propres λ_G^- dépasse 1 dès que $Fr > 0$; le schéma est donc instable. Concernant le troisième mode, il est conditionnellement stable pour les petits nombres de Froude.

3.4.2 Dispersion

L'étude de la dispersion se fait en analysant le rapport entre les vitesses de phase numérique et théorique :

$$R^{\pm} = \frac{\arg(\lambda_G^{\pm})}{\arg(\lambda_e^{\pm})}\,, \qquad R^{3} = \frac{\arg(\lambda_G^{3})}{\arg(\lambda_e^{3})}$$

Idéalement, ce rapport doit valoir 1 quelques soient les valeurs de θ, γ ou Fr. À cause de la lourdeur des calculs que cela nécessite, il est en pratique difficile d'en donner une valeur exacte dans le cas général. Nous regarderons donc uniquement les cas particuliers d'un écoulement dans une direction zonale ($\theta = 0$) et dans une direction diagonale ($\theta = \frac{\pi}{4}$). Un développement limité en séries de γ nous donne :

$$\begin{aligned} R^{\pm}_{[\theta=0]} &= 1 \;-\; \tfrac{1}{12}\left(1 \pm \tfrac{5}{4}Fr + O(Fr^2)\right)\gamma^2 \;+\; O\big(\gamma^4\big) \\ R^{\pm}_{[\theta=\frac{\pi}{4}]} &= 1 \;-\; \tfrac{1}{12}\left(\tfrac{5}{8} \pm \tfrac{5}{4}Fr + O(Fr^2)\right)\gamma^2 \;+\; O\big(\gamma^4\big) \\ R^{3}_{[\theta=0]} &= 1 \;+\; \tfrac{2}{3}\,Fr^2\gamma^2 \;+\; O\big(\gamma^4\big) \\ R^{3}_{[\theta=\frac{\pi}{4}]} &= 1 \;+\; \tfrac{2}{3}\left(Fr^2 - \tfrac{1}{16}\right)\gamma^2 \;+\; O\big(\gamma^4\big) \end{aligned}$$

Pour $\lambda^{\pm}$, nous avons une erreur d'ordre 2 correspondant à un ralentissement des ondes pour $\theta = 0$ comme pour $\theta = \frac{\pi}{4}$, mais moins importante dans ce dernier cas. Pour λ^3, l'erreur correspond à une accélération dans la direction zonale proportionnelle au carré du nombre de Froude. En revanche, dans la diagonale, l'erreur correspond à un ralentissmement pour les nombres de Froude inférieurs à 0.25.

3.4.3 Cas limite où $Fr = 0$

Dans le cas d'une linéarisation autour d'une vitesse nulle, les trois valeurs propres ont un module strictement égal à 1 quelque soit la direction θ :

$$|\lambda_G^{\pm}|_{[Fr=0]} \;=\; |\lambda_G^{3}|_{[Fr=0]} \;=\; 1 \;,$$

c'est-à-dire que le schéma est inconditionnellement stable et qu'aucune échelle n'est amortie. En fait, la troisième valeur propre λ_G^3 est exacte car égale à 1, sa valeur théorique lorsque $Fr = 0$.

Concernant la dispersion, le rapport $R^{\pm}$ entre les vitesses de phase numérique et théorique des deux premières valeurs propres peut s'écrire sous la forme d'un développement en séries de γ :

$$R^{\pm}_{[Fr=0]} \;=\; 1 \;-\; \tfrac{1}{2}\big(1 - \tfrac{3}{2}\sin^2\theta\cos^2\theta\big) \;+\; O\big(\gamma^4\big) \tag{3.43}$$

Ainsi, comme nous l'avons vu dans l'analyse 1D, l'erreur de dispersion est d'ordre 2 et correspond à un ralentissement des ondes. Ce que nous pouvons dire de plus, c'est que cette erreur est maximale dans les directions zonales et méridiennes, et minimale dans les directions diagonales (pour $\theta = \frac{k\pi}{4}$).

3.4.4 Exemples numériques

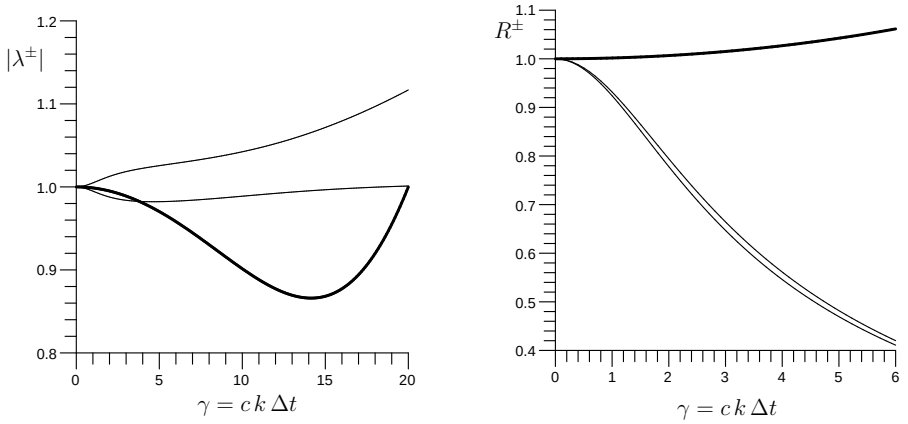
Sur la figure 3.6 sont tracés en fonction de γ, pour un nombre de Froude $Fr = 0.05$, le module des valeurs propres λ_G (à gauche) ainsi que le rapport R (à droite) pour une direction d'analyse zonale ($\theta = 0$, en haut) et diagonale ($\theta = \frac{\pi}{4}$, en bas).

Sur les quatre figures, les courbes en trait continu fin correspondent aux deux premières valeurs propres $\lambda^{\pm}$, tandis que la courbe en trait continu gras correspond à la troisième valeur propre λ^3. Dans la colonne de gauche, nous pouvons observer en particulier le caractère instable du mode correspondant à la valeur propre λ_G^-, dont le module est plus grand que 1 pour $\gamma > 0$. Le troisième mode est stable en revanche.

3.4.5 Conclusion

L'analyse numérique du schéma barotrope 2D de Mars vient confirmer les conclusions tirées de l'analyse 1D faite dans la partie 3.2. Avec les paramètres α_1 et α_3 considérés, le schéma est instable dans le cas général d'une linéarisation autour d'une vitesse non-nulle, quelque soit la direction d'analyse. Le troisième mode physique apparaissant dans l'analyse et correspondant à une discontinuité de contact est relativement bien traité par le schéma bidimensionnel : le problème de stabilité provient des deux premiers modes physique, comme l'avait montré l'analyse 1D.

L'erreur de dispersion est très marquée et correspond à un ralentissement des ondes très marqué des deux premiers modes dans toutes les directions. Pour les petits nombre de Froude, le troisième mode possède une très bonne vitesse de phase dans les directions zonale et méridienne, tandis qu'il est fortement ralenti dans les directions diagonales.



(a) Module ($\theta = 0$)

(b) Argument ($\theta = 0$)

(c) Module ($\theta = \frac{\pi}{4}$)

(d) Argument ($\theta = \frac{\pi}{4}$)

FIG. 3.6 – Schéma barotrope 2D de MARS : module et argument relatif des valeurs propres de la matrice d'amplification pour $Fr = 0.05$, pour un écoulement dans une direction zonale (figures a et b) et dans une direction diagonale (figures c et d). Trait fin : $\lambda_G^{\pm}$; trait gras : λ_G^3.

Chapitre 4

Couplage barotrope/barocline (3D) du code MARS

Sommaire

4.1 Équations considérées 77
4.2 Discrétisation verticale 77
4.3 Schéma numérique complet 78
4.4 Analyse numérique 79
4.5 Conclusion 80
4.6 Etude du schéma temporel 3D 80
4.6.1 Coriolis 80
4.6.2 Couplage vitesses - traceurs 82

Dans cette partie, nous présentons une étude du schéma numérique en temps du code MARS pour le couplage barotrope/barocline (3D). Une analyse numérique est menée sur une linéarisation des équations autour d'une vitesse non-nulle. Il s'agit essentiellement d'étudier l'impact des itérations potentielles entre le 2D et le 3D sur la stabilité du modèle. Nous présentons également une analyse du schéma 3D au niveau du traitement des termes de Coriolis et du couplage vitesse - traceurs.

4.1 Équations considérées

Nous limiterons notre étude à une version simplifiée du modèle, à une seule dimension horizontale. Nous négligeons notamment la force de Coriolis, les termes de diffusion, de frottement sur le fond ainsi que le terme de gradient de pression atmosphérique. Les équations correspondantes s'écrivent alors en coordonnées σ de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \zeta \ + \ \partial_x(hu) \ + \ \partial_\sigma(h\tilde{w}) \ = \ 0 \\ \partial_t u \ + \ u\partial_x u \ + \ \tilde{w}\partial_y u \ = \ -g\,\partial_x \zeta \ + \overbrace{\displaystyle\int_\sigma^1 \partial_x(hb)d\sigma' - b\big(\partial_x d - \sigma\partial_x h\big)}^{\Pi_x} \end{array} \right. \tag{4.1}$$

où d est l'élévation du fond et b est une fonction de x et de σ. En notant $\Delta\rho = \rho - \rho_0$ l'écart à la densité de référence constante, la fonction b s'écrit :

$$b(x,\sigma) \ = \ -g\,\frac{\Delta\rho(x,\sigma)}{\rho_0} \ .$$

4.2 Discrétisation verticale

Pour effectuer l'analyse numérique du schéma, nous considérons un modèle à deux couches dont la discrétisation verticale est représentée de manière schématique sur la figure 4.1. Le fond du domaine est plat, c'est-à-dire $d(x) \equiv h_0$. Les couples (ρ_j, u_j) pour $j = 1, 2$ désignent la densité et la vitesse du fluide

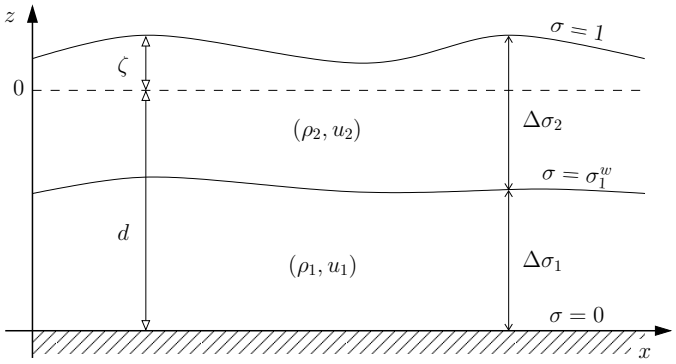


FIG. 4.1 – Coupe schématique verticale du domaine de calcul pour le modèle à deux couches

dans chaque couche. Les vitesses y sont homogènes verticalement et les densités constantes. En posant $\rho_1 = \rho_0 + \Delta\rho_1$ et $\rho_2 = \rho_0$, nous obtenons les relations suivantes :

$$\Pi_{x,1} \;=\; -g\,\sigma_1^w\,\frac{\Delta\rho_1}{\rho_0}\,\partial_x\zeta \qquad \text{et} \qquad \Pi_{x,2} \;=\; 0\;.$$

En linéarisant le système d'équations (4.1) autour de $\zeta = 0$, $u_j = u_0$ avec $d = h_0$ et $\tilde{w} = 0$, nous obtenons :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \partial_t\zeta + h_0\,\partial_x\bar{u} + u_0\partial_x\zeta &=& 0 \\ \partial_t u_1 + u_0\,\partial_x u_1 &=& -g\left(1+\sigma_1^w\,\frac{\Delta\rho_1}{\rho_0}\right)\partial_x\zeta \\ \partial_t u_2 + u_0\,\partial_x u_2 &=& -g\,\partial_x\zeta \end{array}\right. \tag{4.2}$$

où $\bar{u} = u_1\Delta\sigma_1 + u_2\Delta\sigma_2$ est la vitesse moyenne intégrée sur la verticale. Elle vérifie donc la relation $\bar{u} = \sigma_1^w\,u_1 + (1-\sigma_1^w)\,u_2$. Pour plus de lisibilité, nous utiliserons par la suite les notations suivantes :

$$s = \sigma_1^w\,\frac{\Delta\rho_1}{\rho_0} \qquad \text{et} \qquad \sigma = \sigma_1^w\;.$$

La relation de dispersion correspondant au système d'équations (4.2) s'écrit :

$$\omega(k) \;=\; \left|\begin{array}{l} u_0\,k \\ \left(u_0 \pm c\,\sqrt{1+(\sigma_1^w)^2\,\frac{\Delta\rho_1}{\rho_0}}\right)\,k\;. \end{array}\right.$$

Par conséquent, en notant $Fr = \frac{u_0}{c}$ et $\gamma = ck\Delta t$, nous avons une expression des valeurs propres théoriques du système linéaire (4.2) :

$$\lambda_e^{\pm} \;=\; e^{-i\,(Fr\,\pm\,\sqrt{1+\sigma s})\,\gamma} \qquad \text{et} \qquad \lambda_e^3 \;=\; e^{-i\,Fr\,\gamma} \tag{4.3}$$

4.3 Schéma numérique complet

Le schéma numérique complet de MARS, appliqué au un système d'équations (4.1) discrétisé verticalement sur $j_{\max}$ couche est détaillé dans les équations (4.4–4.7). Le prédicteur calcule une estimation des variables barotropes ζ et $\bar{u}$ ainsi que des vitesses u_j. Puis, un correcteur est appliqué de manière itérative pour mettre à jour toutes les variables.

Prédicteur :

$$(P_{2D})\;\left\{\begin{array}{lcl} \frac{2}{\Delta t}\left(\zeta^{n+1,1}-\zeta^{n+\frac{1}{2}}\right) &=& -\partial_x\left[\left(d^u+\zeta^{u,n+\frac{1}{2}}\right)\bar{u}^{n+1,1}\right] \\ \frac{1}{\Delta t}\left(\bar{u}^{n+1,1}-\bar{u}^{n}\right) &=& -\left(\overline{u^n\partial_x u^n + \tilde{w}^{u,n+\frac{1}{2}}\partial_\sigma u^n}\right) \\ & & -g\left(\alpha_1\partial_x\zeta^{n+1,1} + \alpha_2\partial_x\zeta^{n+\frac{1}{2}} + \alpha_3\partial_x\zeta^{n}\right) \\ & & +\overline{\Pi}_x^{n+\frac{1}{2}} \end{array}\right. \tag{4.4}$$

$$
\begin{aligned}
\tfrac{1}{\Delta t}(u_j^{n+1,1} - u_j^n) &= -(\eta_1+\eta_2)\Big(u_j^n \partial_x u_j^n - (\tilde{w}^{u,n+\frac{1}{2}}\partial_\sigma u^n)^{\sigma_j}\Big) \\
&\quad -g\left(\alpha_1\partial_x\zeta^{n+1,1} + \alpha_2\partial_x\zeta^{n+\frac{1}{2}} + \alpha_3\partial_x\zeta^n\right) + \Pi_{x,j}^{n+\frac{1}{2}} \\
&\quad + \tfrac{\beta_1}{(d^u+\zeta^{u,n+\frac{1}{2}})^2}\partial_\sigma(\nu^{u,V}\partial_\sigma u_j^{n+1,1}) \\
&\quad + \tfrac{\beta_2}{(d^u+\zeta^{u,n+\frac{1}{2}})^2}\partial_\sigma(\nu^{u,V}\partial_\sigma u_j^n) \qquad \text{pour } j=1,\ldots,j_{\max}
\end{aligned} \tag{4.5}
$$

Correcteur : pour $k = 1, \ldots$

$$
(C_{2D}) \left\{
\begin{array}{rcl}
\tfrac{2}{\Delta t}\left(\zeta^{n+1,k+1} - \zeta^{n+\frac{1}{2}}\right) &=& -\partial_x\left[\left(d^u + \zeta^{u,n+\frac{1}{2}}\right)\bar{u}^{n+1,k+1}\right] \\
\tfrac{1}{\Delta t}\left(\bar{u}^{n+1,k+1} - \bar{u}^n\right) &=& -\eta_1\Big(\overline{u^{n+1,k}\partial_x u^{n+1,k} + \tilde{w}^{u,n+\frac{1}{2}}\partial_\sigma u^{n+1,k}}\Big) \\
&& -\eta_2\Big(\overline{u^n\partial_x u^n + \tilde{w}^{u,n+\frac{1}{2}}\partial_\sigma u^n}\Big) \\
&& -g\left(\alpha_1\partial_x\zeta^{n+1,k+1} + \alpha_2\partial_x\zeta^{n+\frac{1}{2}} + \alpha_3\partial_x\zeta^n\right) \\
&& +\overline{\Pi}_x^{n+\frac{1}{2}}
\end{array}
\right. \tag{4.6}
$$

$$
\begin{aligned}
\tfrac{1}{\Delta t}(u_j^{n+1,k+1} - u_j^n) &= -\eta_1\Big(u_j^{n+1,k}\partial_x u_j^{n+1,k} + (\tilde{w}^{u,n+\frac{1}{2}}\partial_\sigma u^{n+1,k})^{\sigma_j}\Big) \\
&\quad -\eta_2\Big(u_j^n\partial_x u_j^n - (\tilde{w}^{u,n+\frac{1}{2}}\partial_\sigma u^n)^{\sigma_j}\Big) \\
&\quad -g\left(\alpha_1\partial_x\zeta^{n+1,k+1} + \alpha_2\partial_x\zeta^{n+\frac{1}{2}} + \alpha_3\partial_x\zeta^n\right) + \Pi_{x,j}^{n+\frac{1}{2}} \\
&\quad + \tfrac{\beta_1}{(d^u+\zeta^{u,n+\frac{1}{2}})^2}\partial_\sigma(\nu^{u,V}\partial_\sigma u_j^{n+1,k+1}) \\
&\quad + \tfrac{\beta_2}{(d^u+\zeta^{u,n+\frac{1}{2}})^2}\partial_\sigma(\nu^{u,V}\partial_\sigma u_j^n) \qquad \text{pour } j=1,\ldots,j_{\max}
\end{aligned} \tag{4.7}
$$

où $\Pi_x^{n+\frac{1}{2}} = \int_\sigma^1 \partial_x(hb)^{n+\frac{1}{2}}d\sigma' - b^{u,n+\frac{1}{2}}\left(\partial_x d^\zeta - \sigma\partial_x(d^\zeta + \zeta^{n+\frac{1}{2}})\right)$.

Une étape de forçage à la fin des itérations du correcteur est effectuée systématiquement afin de supprimer le biais entre la moyenne $\overline{(u_j)}$ des vitesses baroclines et la vitesse barotrope $\bar{u}$.

En notant $X^n = (zeta^n, \bar{u}^n, \bar{v}^n)^T$ le vecteur des inconnues au temps n, l'application de ce schéma numérique au système linéarisé du modèle à deux couches (4.2) revient à résoudre le système linéaire suivant :

$$X^{n+1} = FG_\infty^X X^n$$

où la matrice F correspond à l'étape de forçage des vitesse et G_∞^X est la matrice d'amplification à la convergence du schéma, c'est-à-dire la limite quand $k \to \infty$ de la matrice G_k^X d'amplification pour une itération. L'analyse numérique consiste donc à étudier les valeurs propres $\lambda_\infty^\pm$ de la matrice d'amplification FG_∞^X et de les comparer aux valeurs propres théoriques données en (4.3).

4.4 Analyse numérique

Ordre : Nous allons nous intéresser tout d'abord au cas particulier d'une unique itération du correcteur, c'est-à-dire $k = 1$.

Dans le cas général d'une linéarisation autour d'une vitesse non-nulle ($Fr \neq 0$), l'analyse montre que le schéma peut être d'ordre 2 pour le modèle étudié sous la conditions suivante :

$$\left\{
\begin{array}{l}
\eta_1 = \frac{3}{4} \\
\alpha_1 = \alpha_3
\end{array}
\right. \tag{4.8}$$

Dans le cas limite où $Fr = 0$, le schéma est d'ordre 2 sous la seule condition $\alpha_1 = \alpha_3$.

Stabilité : Toujours dans le cas d'une unique itération du correcteur ($k = 1$), un développement en séries de γ du module des valeurs propres physiques de la matrice d'amplification donne :

$$|\lambda_1^\pm| = 1 + \tfrac{1}{4}\left(\tfrac{3}{2} - 2\eta_1\right)Fr\left(Fr \pm \sqrt{1+\sigma s}\right)\gamma^2 + O(\gamma^4) \tag{4.9}$$

Pour le choix de paramètres $\eta_1 = \eta_2 = \frac{1}{2}$ généralement employé, nous avons :

$$|\lambda_1^\pm|_{\left[\eta_1=\frac{1}{2}\right]} = 1 + \tfrac{1}{8}Fr\left(Fr \pm \sqrt{1+\sigma s}\right)\gamma^2 + O(\gamma^4) \tag{4.10}$$

Le schéma est alors instable dès lors que le nombre de Froude n'est pas nul. En choisissant $\eta_1 = \frac{3}{4}$ et $\eta_2 = \frac{1}{4}$, le schéma est d'ordre 2 pour le modèle (4.2) et nous avons :

$$|\lambda_1^{\pm}|_{[\eta_1=\frac{3}{4}]} = 1 + \tfrac{1}{16}Fr^2\Big(1 \pm Fr\big(\tfrac{1}{\sqrt{1+\sigma s}} + 10\sqrt{1+\sigma s}\big) + O(Fr^2)\Big)\gamma^4 + O(\gamma^6) \tag{4.11}$$

Ici encore, le schéma est instable pour les nombre de Froude non nuls.

Pour illustrer ces résultats et les étendre à plusieurs itérations du correcteur, la figure 4.2 montre le module des valeurs propres $\lambda_k^{\pm}$ en fonction de γ pour les deux choix de paramètres présentés ci-dessus, et pour $k = 1$ et $k = 4$. Nous avons choisi les valeurs numériques $\sigma = \sigma_1^w = \frac{9}{10}$ et $\frac{\Delta\rho_1}{\rho_0} = \frac{1}{100}$. On a donc $s = \frac{9}{1000}$. Le nombre de Froude est fixé à $Fr = 0.2$.

On remarque que le schéma de MARS, qu'on le choisisse à l'ordre 1 ou à l'ordre 2, est toujours instable. Augmenter le nombre d'itérations du correcteur ne semble pas améliorer les choses.

Cas limite où $Fr = 0$: Dans le cas d'une linéarisation autour d'une vitesse nulle, l'expression des valeurs propres $\lambda_k^{\pm}$ ne dépend plus de k, c'est-à-dire que le schéma a les mêmes propriétés quelque soit le nombre d'itérations du correcteur. Par ailleurs, si $\gamma \leq \frac{2}{\sqrt{\sigma s}}$, le module des valeurs propres est strictement égal à 1. Au delà, les modules de λ_k^+ et λ_k^- divergent.

La figure 4.3 montre le module des valeurs propres $\lambda^{\pm}$ en fonction de γ pour $Fr = 0$. Comme pour le cas général, nous avons choisi les valeurs numériques $\sigma_1^w = \frac{9}{10}$ et $\frac{\Delta\rho_1}{\rho_0} = \frac{1}{100}$.

4.5 Conclusion

Nous avons étudié les propriétés sur schéma numérique de MARS pour le couplage barotrope / barocline, pour un modèle simplifié à deux couches.

Le choix couramment fait pour la valeur des paramètres η_1 et η_2, correspondant aux variables `cti` et `cte` dans le code de MARS, conduit à un schéma d'ordre 1 ($\eta_1 = \eta_2 = \frac{1}{2}$). Il est possible d'obtenir un schéma d'ordre 2 en choisissant $\eta_1 = \frac{3}{4}$ et $\eta_2 = \frac{1}{4}$. Mais dans les deux cas, le schéma numérique est instable dans le cas général.

Dans le cas limite où $Fr = 0$, l'amortissement des ondes produit par le schéma numérique est nul dans tous les cas, jusqu'à ce qu'une limite de stabilité soit atteinte. Celle-ci est cependant spécifique au modèle simplifié à deux couches et ne saurait être appliquée telle quelle au cas général.

4.6 Etude du schéma temporel 3D

Nous étudions ici le schéma temporel du modèle pour les parties baroclines. Nous nous intéressons essentiellement à la discrétisation temporelle de la force de Coriolis ainsi que du couplage entre vitesse et traceurs pour la propagation des ondes internes. Les parties purement advectives sont elles étudiés dans le paragraphe sur les schémas d'advection.

4.6.1 Coriolis

Dans le modèle MARS, les vitesses 3D sont décalées d'un demi pas de temps, comme indiqué sur la figure (4.4)
Le terme de Coriolis est traité temporellement comme suit :

$$\begin{aligned} u^{n+\frac{1}{2}} &= u^{n-\frac{1}{2}} + \Delta t\, f\, v^n \\ v^{n+1} &= v^n - \Delta t\, f\, u^{n+\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Une étude des valeurs $\lambda^{\pm}$ propres de la matrice d'amplification associée montre que le schéma est stable pour $f\Delta t \leq 2$, le facteur 2 provenant du décalage en temps. Dans ce cas, il est également non dissipatif ($|\lambda^{\pm}| = 1$).
Le développement limité pour $f\Delta t \ll 1$ montre que le schéma induit une accélération de la rotation par rapport à la rotation exacte :

$$\frac{\arg \lambda^{\pm}}{\pm f\Delta t} = 1 + \frac{(f\Delta t)^2}{24}$$

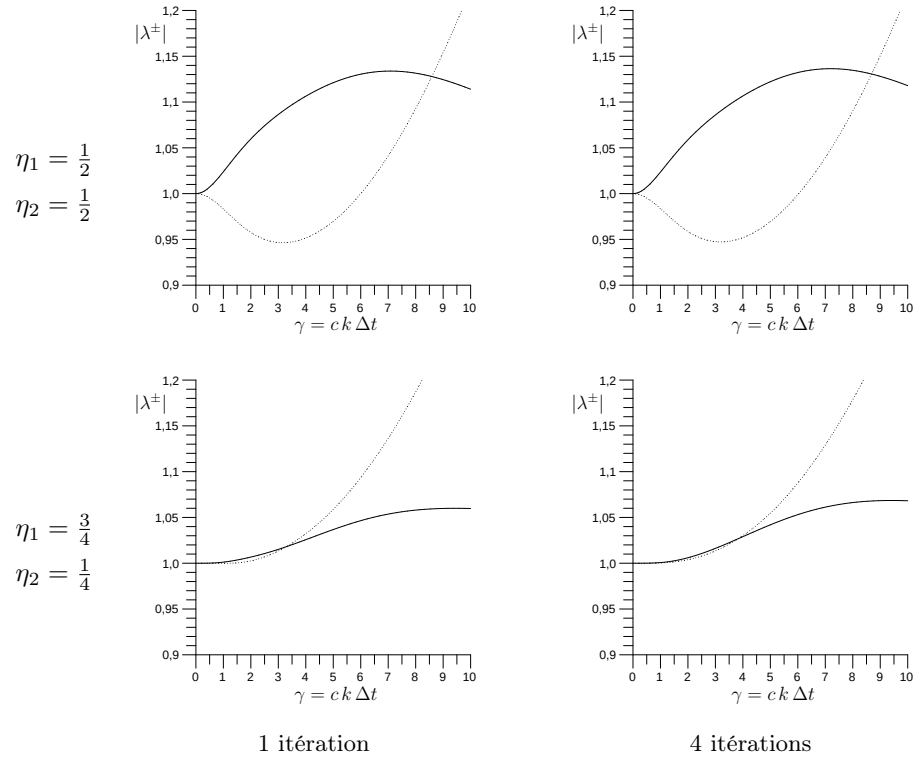


FIG. 4.2 – Stabilité du schéma MARS pour 1 et 4 itérations de l'étape de correction (4.6)–(4.7) et pour les choix de paramètres $\eta_1 = \eta_2 = \frac{1}{2}$ (en haut) et $\eta_1 = \frac{3}{4},\ \eta_2 = \frac{1}{4}$ (en bas).

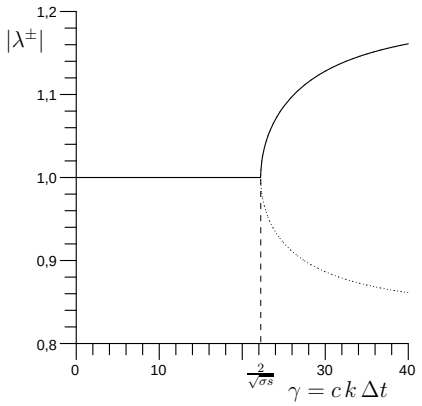


FIG. 4.3 – Module des valeurs propres $\lambda_k^{\pm}$ pour $Fr = 0$.

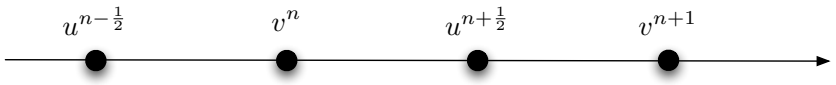


FIG. 4.4 – Décalage des vitesses u, v

4.6.2 Couplage vitesses - traceurs

Nous nous intéressons également au couplage entre vitesses et traceurs, ceci pouvant entraîner une contrainte forte sur le pas de temps du modèle, via la propagation des ondes internes. Dans le modèle, les traceurs sont calculés à tous les demi-pas de temps comme indiqué sur la figure (4.5)

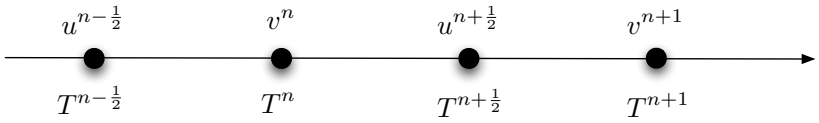


FIG. 4.5 – Décalage des vitesses u, v et traceurs T

Le couplage entre vitesses et traceurs est étudié après avoir adimensionalisé les variables de telle sorte que nous étudions finalement le système suivant :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial t} &= -\frac{\partial u}{\partial x} \end{aligned}$$

Le modèle MARS en effectue la discrétisation temporelle suivante :

$$\begin{aligned} T^n &= T^{n-\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t}{2}\frac{\partial u^{n-\frac{1}{2}}}{\partial x} \\ u^{n+\frac{1}{2}} &= u^{n-\frac{1}{2}} - \Delta t\,\frac{\partial T^n}{\partial x} \\ T^{n+\frac{1}{2}} &= T^n - \frac{\Delta t}{2}\frac{\partial u^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x} \end{aligned}$$

On peut alors montrer que le comportement est exactement le même que celui, vu dans le paragraphe précédent, vis à vis de la forme de Coriolis. Le schéma est stable et non dissipatif pour des CFL inférieure ou égale à 2. Il correspond à une accélération de la propagation d'ondes à l'ordre 2 avec le même coefficient $(\frac{1}{24})$.

Chapitre 5

Schémas d'advection

Sommaire

5.1 Etude de l'action du limiteur Upwind 83
5.1.1 Le traitement des traceurs dans MARS 83
5.1.2 Analyse de l'usage du limiteur dans MARS 84

5.1 Etude de l'action du limiteur Upwind

Le modèle MARS utilise un schéma d'advection basé sur une bascule d'un schéma à l'ordre 3 (Euler-Quick dans les zones où la solution est régulière) à un schéma à l'ordre 1 (Euler-amont) ailleurs. Nous étudions ici les conséquences de l'utilisation de ce schéma dans les applications. Ce travail s'inscrit dans l'étude visant l'amélioration des performances de l'advection des traceurs par le modèle. C'est l'étape préliminaire aux futures comparaisons de performance entre le traitement actuel et les différents schémas qui seront implémentés.

5.1.1 Le traitement des traceurs dans MARS

Le traitement d'un traceur est réalisé dans MARS à l'aide de l'équation de conservation suivante :

$$\frac{\partial hC}{\partial t} + \frac{\partial huC}{\partial x} + \frac{\partial hvC}{\partial y} + \frac{\partial h\tilde{w}C}{\partial \sigma} = \frac{\partial hF_x^C}{\partial x} + \frac{\partial hF_y^C}{\partial y} + \frac{\partial hF_z^C}{\partial \sigma} + h(S-P), \tag{5.1}$$

avec C le traceur considéré, h la hauteur d'eau totale, $(u,v,\tilde{w})$ les composantes du vecteur vitesse, (F_x^C,F_y^C,F_z^C) les composantes du vecteur du flux de diffusion et (S,P) les termes de source et de puît du traceur.

La résolution de cette loi de conservation est réalisée dans MARS à chaque valeur de pas de temps d'advection. Cet incrément temporel est noté *pasadv*. Le calcul de la diffusion verticale, discrétisée de façon implicite en temps, fait intervenir un système tridiagonal à résoudre pour chaque profil vertical. L'intégration de ce système est réalisé du fond à la surface.

Pour y parvenir, le code fait appel au préalable, à un certain nombre de routines pour évaluer les flux d'advection et de diffusion sur l'horizontale. La partie qui nous interesse ici est la manière par laquelle le modèle calcule les flux advectifs. Dans MARS, les flux sont évalués à partir d'un schéma QUICK (Leonard, 1979) modulé par un limiteur tout-ou-rien. Ce limiteur fait alors basculer le schéma d'un ordre 1 à un ordre 3 suivant des critères spécifiques. Dans le code, on peut trouver ces calculs dans les routines $flux.F90$ et $fluy.F90$.

Description du terme d'advection zonale

Le second terme de l'équation 5.1 est discrétisé de la manière suivante :

$$\frac{\partial huC}{\partial x} \equiv \partial_x \left[h^u A_x^C \right], \tag{5.2}$$

avec h^u la dernière hauteur d'eau calculée au point u et $A_x^C = uC^u$ où u est la dernière vitesse zonale calculée et C^u la valeur de la concentration du traceur qui sera advectée. C'est sur cette dernière valeur que le schéma agira. En effet, selon la direction du flux (valeur positive ou négative de la vitesse), et selon les valeurs de traceur aux points de part et d'autre du point de vitesse ainsi que le point "en amont" (à droite ou à gauche selon la direction du courant) on va avoir pour valeur de C^u le plus proche voisin (cas upwind d'ordre 1) ou une combinaison des trois points susnommés (cas upwind d'ordre 3).

Prenons par exemple le cas où le courant est positif. On calcule la valeur du traceur advecté au point $u(i, j)$ (on laisse de coté l'indice verticale). On note alors a le point en $\zeta(i-1, j)$ (c'est le point amont dont on parlait dans le paragraphe précédent), b le point en $\zeta(i, j)$ et c le point en $\zeta(i+1, j)$. Les valeurs de C sont donc notées : C_a, C_b et C_c. Alors si le point b n'est pas un extréma local de C et si la pente de C ne varie pas trop rapidement (ce point fait intervenir la valeur du paramètre $qmax$ tel que $\frac{1}{qmax} < abs(C_c - C_b)/abs(C_b - C_a) < qmax$). Alors dans ce cas, la valeur de C^u sera égale à $\frac{3}{8}C_c + \frac{6}{8}C_b - \frac{1}{8}C_a$. Sinon C^u prend la valeur du plus proche voisin en amont soit C_b.

5.1.2 Analyse de l'usage du limiteur dans MARS

On cherche à savoir quand le modèle utilise l'ordre 1 et quand il utilise l'ordre 3. Pour cela on agit directement dans les routines $flux.F90$ et $fluy.F90$ où l'on introduit une variable spatiale qui sera incrémentée chaque fois que l'ordre 3 est utilisé. On va réaliser deux simulations où l'on regardera la valeur de ce paramètre. La première va être le cas test du Vortex barocline et la seconde sera le rang 1 de la configuration réaliste du Golfe de Gascogne. Par la suite on étudiera un cas très particulier démontrant les limites de la procédure "tout-ou-rien" utilisée par le modèle.

Cas test vortex barocline

Dans ce cas test, seul la température varie. La salinité est homogène. Pour le champ de température, on a vu dans la description de ce cas test (section 2.2) que le vortex fait apparaître de fines structures au cours de son évolution. Cela est donc intéressant pour voir comment le code gère ce type de champ de traceur.

Utilisation relative du schéma d'ordre 1 et 3

Sur les figures 5.1, 5.2, 5.3 et 5.4, les champs représentent la valeur, moyennée sur un jour, du paramètre de décentrage responsable du passage au schéma d'ordre 3. La valeur de ce paramètre est rapportée au centre de la maille par demi somme des points u et v. Plus la valeur est proche de 1 plus le code a fait intervenir le schéma d'ordre élevé. Les contours représentent la structure en température du tourbillon. Les images sont données pour les jours 2, 25, 50 et 75 de la simulation.

Sur la figure 5.1, on voit que le schéma est principalement d'ordre 3. Ce n'est pas surprenant étant donné que le champ de température est bien lisse en début de simulation. Les critères sont alors respectés pour être à l'ordre 3. Cependant on observe un certain nombre d'artéfacts qu'il faut expliquer. Déjà, la croix centrée sur le tourbillon est la signature de la courbure des contours de température. En effet, sur les axes, le champ température présente des extrémas locaux selon l'une des deux directions. Alors le critère de monotonie n'est pas respecté et le limiteur passe le schéma à l'ordre 1. La valeur est alors autour de 0.5 car l'effet ressentit dans une seule direction à la fois. Les routines $flux.F90$ et $fluy.F90$ font intervenir le même paramètre de calcul et on additionne alors les deux critères selon les directions x et y. Ce qui donne cette valeur proche de 0.5. On observe une signature un peu similaire sur les bords du domaine. Mais cette fois si, cela traduit le traitement des points de bord. Dans le cas où le point a est une maille à terre alors le schéma ne peut faire appel à l'ordre 3.

Sur la figure 5.2, la structure présente de fines structures au niveau du champ de température. Le signale de décentrage est un peu plus bruité qu'au départ mais globalement on reste à l'ordre 3 au centre du tourbillon et à l'extérieur. Par contre le long de la structure fine (à droite du vortex) on voit que le schéma fait intervenir l'ordre 1. Cela peut être expliqué par le fait que les valeurs de 3 points successifs peuvent ne pas présenter la monotonie nécessaire, ou présentent un changement de valeur de traceur trop rapide ou encore que la valeur du gradient est trop faible ce qui positionne le test de pente au-delà de la limite inférieur. Cette observation est encore plus nette sur la figure 5.3. En effet au bout de 50 jours de simulation, le vortex a généré encore plus de structures fines obligeant le code à utiliser un upwind d'ordre 1. On voit sur ces deux images (5.2 et 5.3) que là où le champ de température évolue de façon régulière l'ordre 3 est dominant. Pour une région plus bruité, l'ordre 1 est sollicité plus régulièrement. La figure 5.4 confirme ces observations. En effet, le long

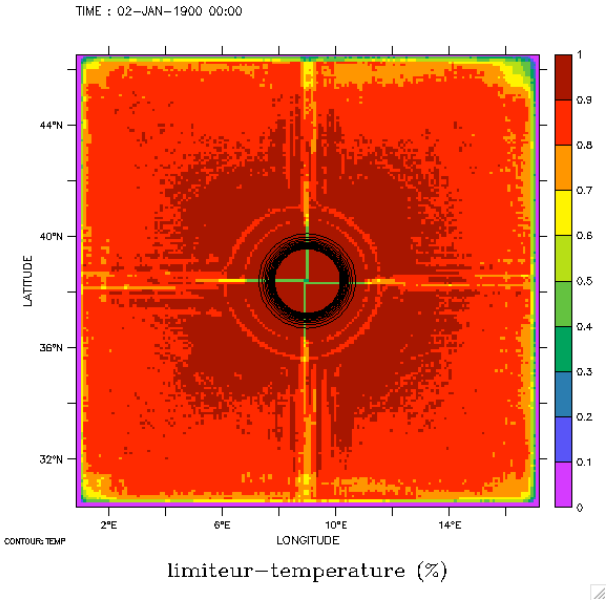


FIG. 5.1 – Valeur du limiteur moyennée sur un jour pour le cas test du vortex barocline au second jour de simulation. Le contour représente la signature en température du tourbillon.

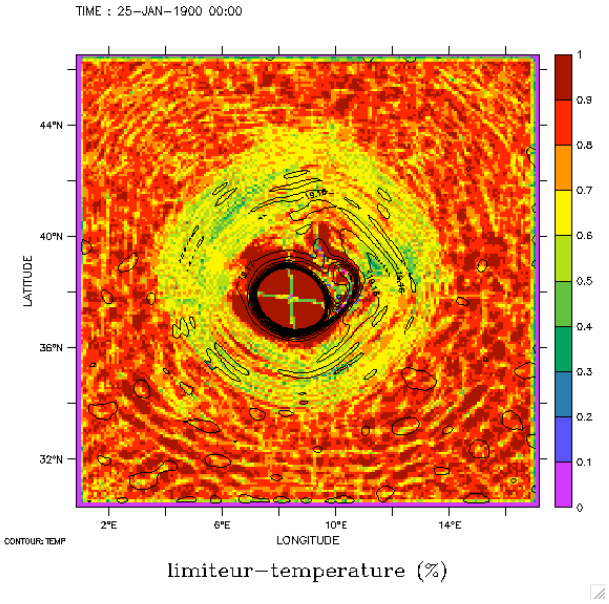


FIG. 5.2 – Valeur du limiteur moyennée sur un jour pour le cas test du vortex barocline après 25 jours jour de simulation. Le contour représente la signature en température du tourbillon.

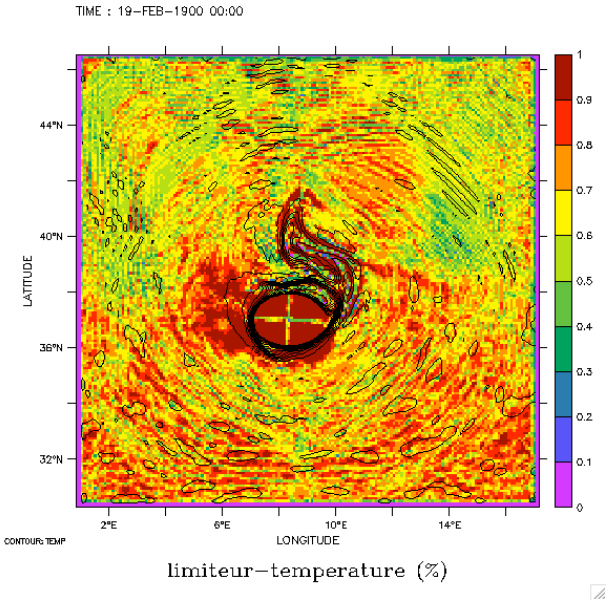


FIG. 5.3 – Valeur du limiteur moyennée sur un jour pour le cas test du vortex barocline après 50 jours de simulation. Le contour représente la signature en température du tourbillon.

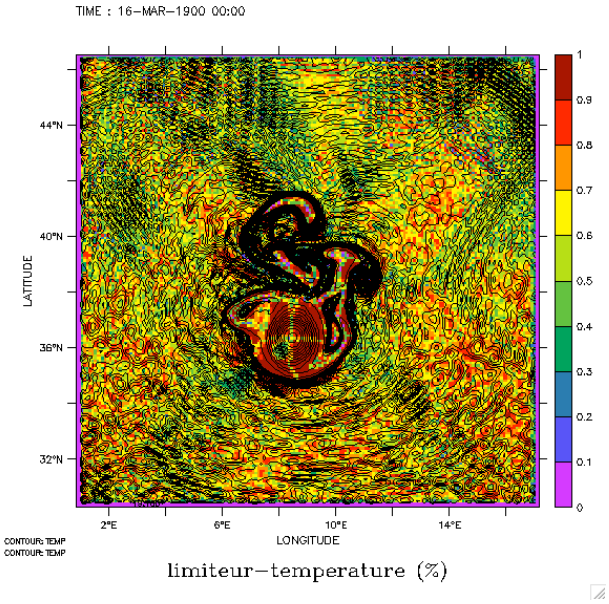


FIG. 5.4 – Valeur du limiteur moyennée sur un jour pour le cas test du vortex barocline après 75 jours jour de simulation. Le contour représente la signature en température du tourbillon.

des filaments, on a toujours de plus faible valeur de limiteur que dans l'intérieur de la structure où le champ de traceur est plus régulier.

Sur cette figure (5.4) on observe une tâche verte sur la partie Sud-Ouest du vortex. Cette diminution de la valeur du limiteur est liée à l'apparition d'une ondulation dans le contour de température. Les ondulations sont plus facilement observables sur la figure 5.5. Dans les résulats de simulations présentés dans la section 2.2, les valeurs de diffusion horizontale pour les traceurs (kx et ky) étaient mise à la valeur 75. Ici, nous les avons forcées à 0 afin de focaliser sur l'advection. Ainsi dans le run de référence (section 2.2) nous n'observions pas cette ondulation du champ de température, le signale étant lissé par la diffusion.

Sur la figure 5.4, on a diminué la valeur entre chaque contour afin de faire apparaître le bruit dans le champ de température et ainsi pouvoir mettre en évidence la relation de celui-ci avec l'utilisation plus fréquente du schéma d'advection d'ordre 1. C'est la signature de ce bruit numérique que l'on observe par l'apparition de petites valeurs un peu partout dans le champ d'utilisation du limiteur.

Comparaison avec une utilisation systématique de l'ordre 3

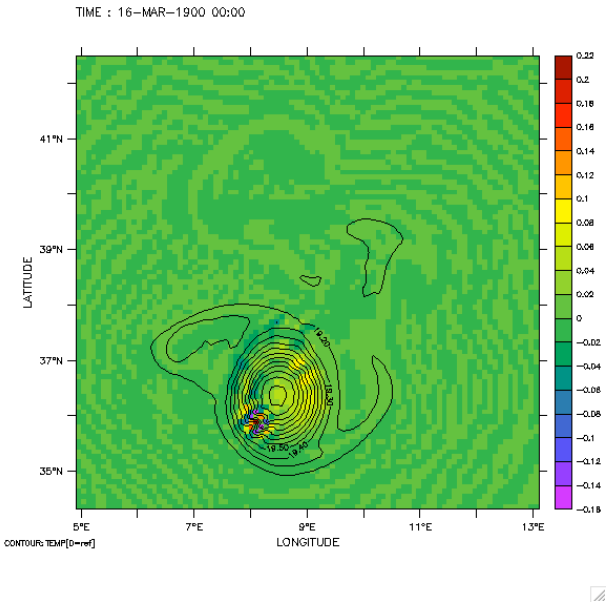


FIG. 5.5 – Différence de tempéraure entre le run de référence et un run utilisant uniquement un schéma d'advection d'ordre 3 dans le cas du cas test du vortex barocline au bout de 75 jours de simulation. Les contours sont donnés pour la simulation de référence.

Pour tenter de voir l'impact du limiteur tout-ou-rien, on a réalisé une simulation du vortex barocline en imposant systématiquement l'ordre 3 (en dehors des bords) pour l'advection des traceurs. On note cette simulation UW3. Les figures 5.5 et 5.6 donnent la différence des champs de température entre la simulation de référence avec limiteur et UW3. La différence entre les deux figures est au niveau des contours de température. La figure 5.5 donne les contours de la référence et la figure 5.6 ceux de la simulation UW3. Nous ne présentons pas le domaine total car les différences ne sont pas significatives et reste de l'ordre de 0.02 degré pour cette date à l'image de ce que l'on peut observer sur les figures en dehors de la structure tourbillonnaire.

On voit que la principale différence dans les champs de température se situe au niveau des ondulations

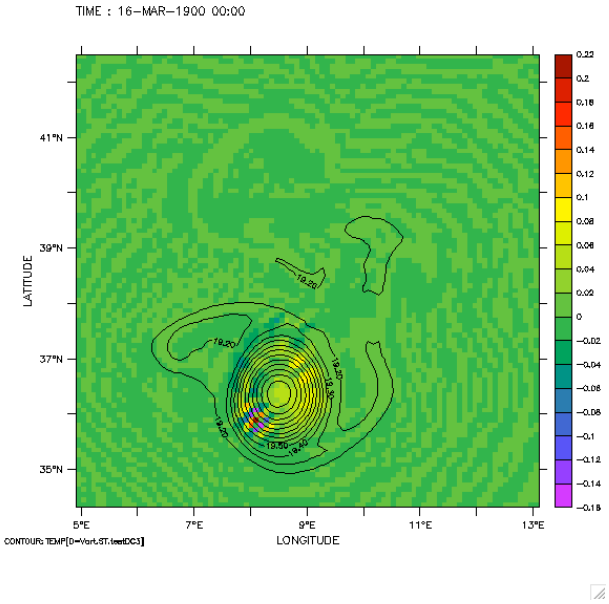


FIG. 5.6 – Idem que la figure 5.5 mais les contours représentent maintenant le run utilisant un schéma Upwind d'ordre 3.

décrites pour la figure 5.4. C'est à cet endroit que le limiteur forçait l'utilisation de l'ordre 1 dans le run de référence. Pour la simulation UW3, on n'observe plus ces ondulations dans le champ de température (5.6). Ce résultat semble être surprenant étant donné que l'impact d'un schéma d'ordre 1 serait plutôt de lisser le champ de température. L'étude des différents pas de temps montre que les fines structures sont mieux définies dans UW3 que dans le cas standard. C'est bien entendu une conséquence directe des observations effectuées sur la valeur du limiteur autour de ces structures fines. Le schéma d'advection dans le cas standard est alors d'ordre 1 ce qui tend à effacer ces filaments.

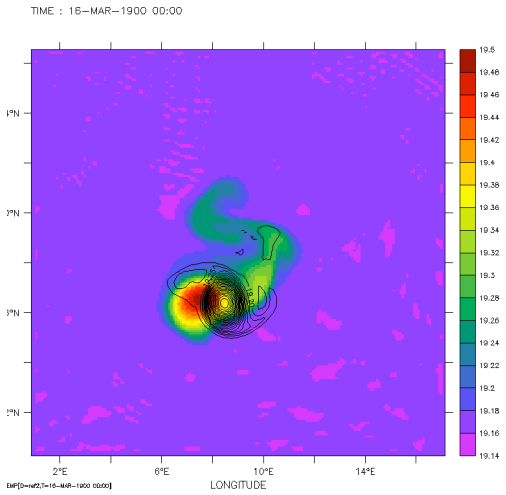


FIG. 5.7 – Le champ correspond au champ de température au bout de 75 jours pour une simulation où le schéma d'advection des traceurs est un upwind d'ordre 1. Les contours représentent les résultats pour la simulation de référence à la même date.

On a réalisé une autre simulation en forçant le limiteur à choisir le schéma d'ordre 1. Sur la figure 5.7, on a reporté les résultats de cette simulation. Le champ est la température après 75 jours et les contours sont donnés pour le champ de température du run de référence. On observe sur cette figure ce que l'on attendait soit que le schéma d'ordre 1 est très diffusif. Le champ de température est donc peu à peu dégradé. La valeur maximum de température chute à 19.5 degré soit presque un degré de moins que la valeur standard. On observe également moins de fine structure car elles sont "gommées" par la diffusion.

Il est intéressant de constater que le déplacement du tourbillon est plus important que pour les simulations standard et UW3. Ce déplacement est alors plus en accord avec les résultats que l'on obtient pour les petit pas de temps que l'on a décrits dans la section 2.2 où l'on obtenait des résultat semblable à ceux de Pierrick Penven (2006). Il y a donc un impact important du schéma d'advection des traceurs sur la solution. Ce point est à approfondir. C'est d'ailleurs prévu dans la suite du contrat sur l'étude des schémas d'advection.

Configuration réaliste Golfe de Gascogne

Nous avons réalisé la même étude du limiteur sur une configuration réaliste correspondant au rang 1 du Golfe de Gascogne. Les résultats nous amène à des conclusions similaires à celles faites dans le cas du vortex barocline.

Sur la figure 5.8, on a reporté les valeurs, moyennées sur les 300 jours de la simulation, du limiteur de la salinité pour différentes couches du modèle. Le panneau (a) donne le résultat pour la couche de fond, les panneaux (b) et (c) sont ceux de couches intermédiaires et le panneau (d) représente la couche de surface. Les contours donnent la bathymétrie de la zone. Sur ces images, on voit en premier lieu que globalement le modèle utilise un schéma d'advection d'ordre 3. Sur les quatre panneaux, on voit que sur le plateau continental l'ordre 3 est dominant alors que dans la plaine abyssale l'ordre 1 est pratiquement autant solicité que l'ordre 3 sauf pour la couche de surface.

On peut expliquer cette observation par le fait que le limiteur foctionne pour la configuration réaliste de la même manière que pour le cas test. Alors les zones qui présentent un champ pratiquement homogène de traceur sont soumises à l'erreur machine ou encore que le rapport de pente est dans la limite basse du critère.

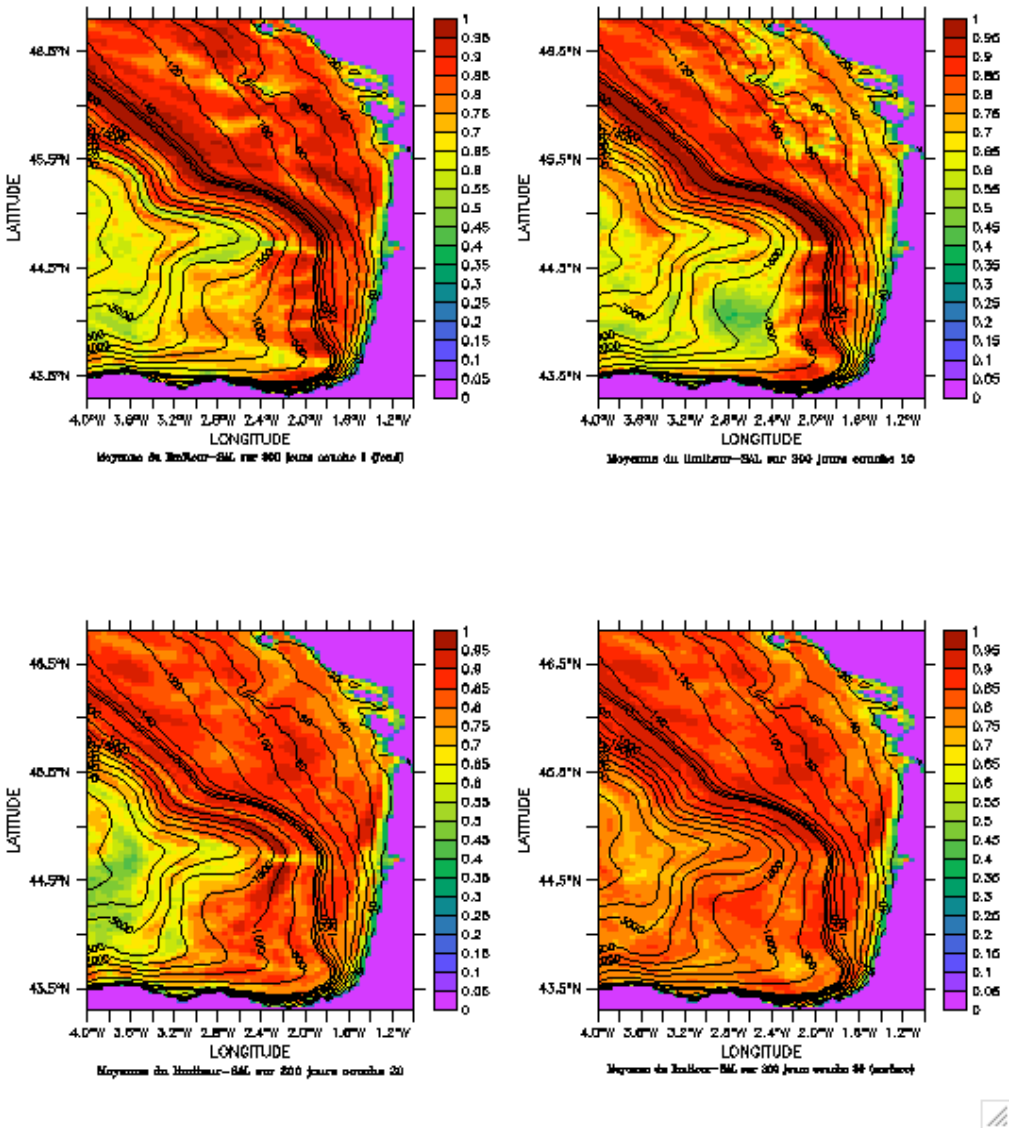


FIG. 5.8 – Les champs représentent la valeur, moyennée sur 300 jours, du limiteur pour la salinité. Le champs (a) est pour la couche de fond, les champs (b) et (c) deux couches intermédiaires et le champ (d) la couche de surface. Pour chaque panneau, les contours représentent la bathymétrie.

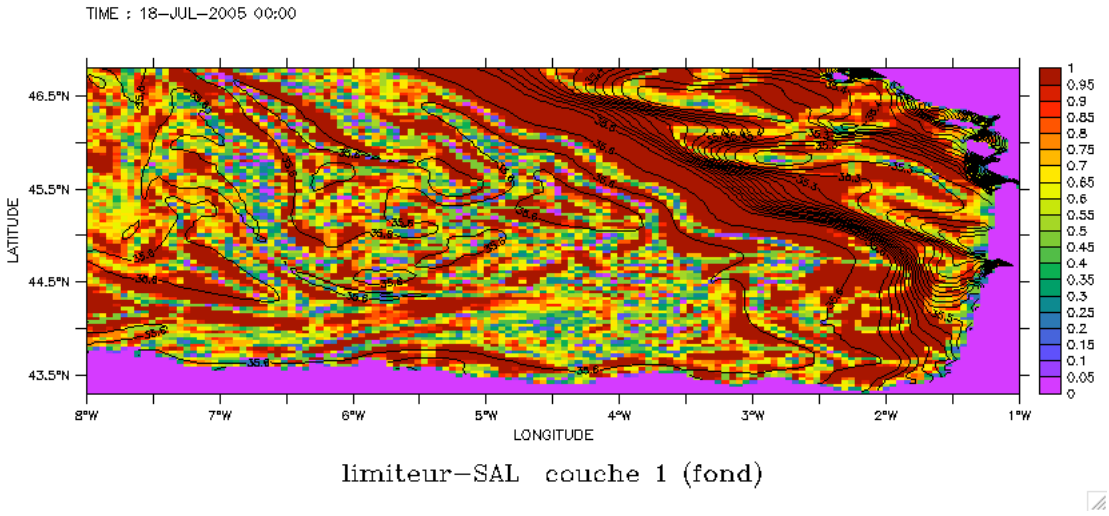


FIG. 5.9 – Champ de la valeur, moyennée sur 1 jour, du limiteur pour la salinité pour la couche de fond après 200 jours de simulation. Les contours représentent la le champ de salinité, l'écart entre 2 contours est de 0.02 psu.

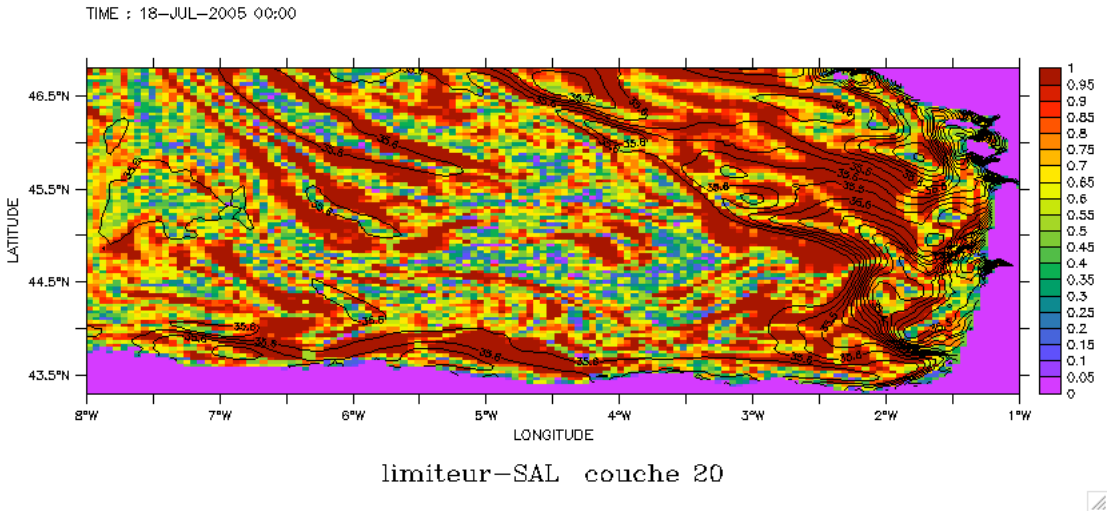


FIG. 5.10 – Champ de la valeur, moyennée sur 1 jour, du limiteur pour la salinité pour la vingtième couche après 200 jours de simulation. Les contours représentent la le champ de salinité, l'écart entre 2 contours est de 0.02 psu.

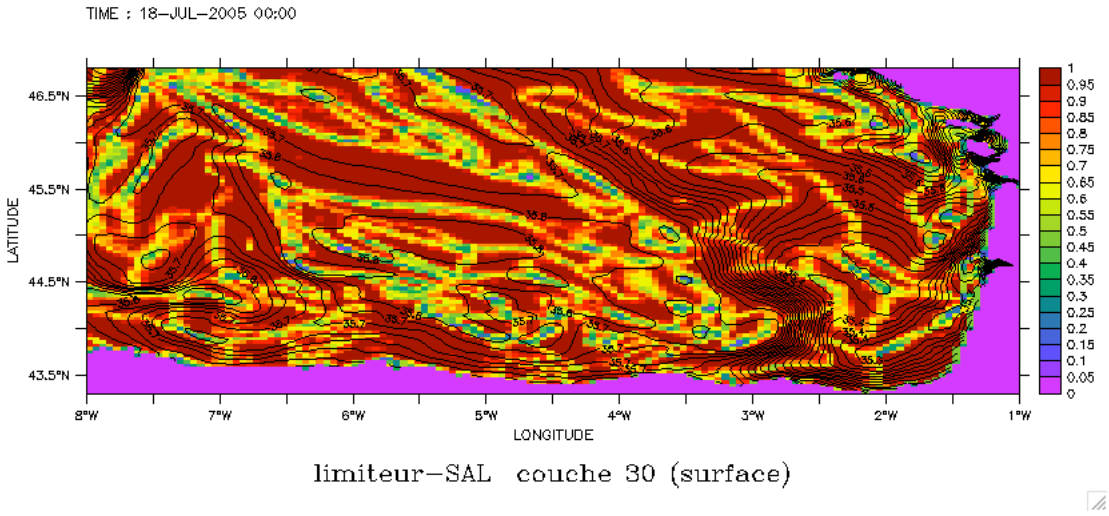


FIG. 5.11 – Champ de la valeur, moyennée sur 1 jour, du limiteur pour la salinité pour la couche de surface après 200 jours de simulation. Les contours représentent la le champ de salinité, l'écart entre 2 contours est de 0.02 psu.

L'utilisation accrue de l'ordre 1 au dessus de la plaine abyssale est une conséquence de ce bruit tout comme dans le cas du vortex barocline. Les erreurs font alors apparaître des extrémas locaux de traceurs forçant le schéma à l'ordre 1. On n'observe pas ce phénomène pour les couches supérieures comme pour la couche de surface car dans ce cas, le champ est soumis beaucoup plus à la dynamique. Ainsi le champ de traceur est moins dépendant de cette erreur machine.

Les figures 5.9, 5.10 et 5.11 représentent la moyenne journalière de la valeur du limiteur pour le 200 ème jour de simulation pour les couches 1 (fond), 20 et 30 (surface). Les contours sont les champs de salinité correspondants. Sur la plaine abyssale, les deux premières figures (5.9 et 5.10) illustrent bien les valeurs de limiteur faibles dues aux erreurs sur les champs homogènes. Dans la région du plateau continental on a bien l'ordre 3 prédominant à l'exception des endroits où le champ de salinité présente des variations rapides ou des extrémas locaux dans la direction zonale ou méridienne.

On observe le même comportement pour le limiteur sur toute la région dans le cas de la couche de surface. Ce qui est en accord avec les observations faites sur le panneau (d) de la figure 5.8. L'ensemble des résultats de la configuration réaliste confirment les observations déjà réalisées pour le cas test du vortex barocline.

Cas test particulier

Nous avons réalisé un programme extérieur à MARS afin de tester le limiteur tout-ou-rien dans une configuration très particulière. On advecte un champ de température par un courant constant en 1D. On prend alors un profil horizontal de température avec une évolution exponentielle telle que le rapport de pente soit égale à la valeur limite $1/qmax$, soit la valeur minimale du critère. Alors avec les arrondis de la machine, le code bascule du premier au troisième ordre quasiment d'un point à l'autre.

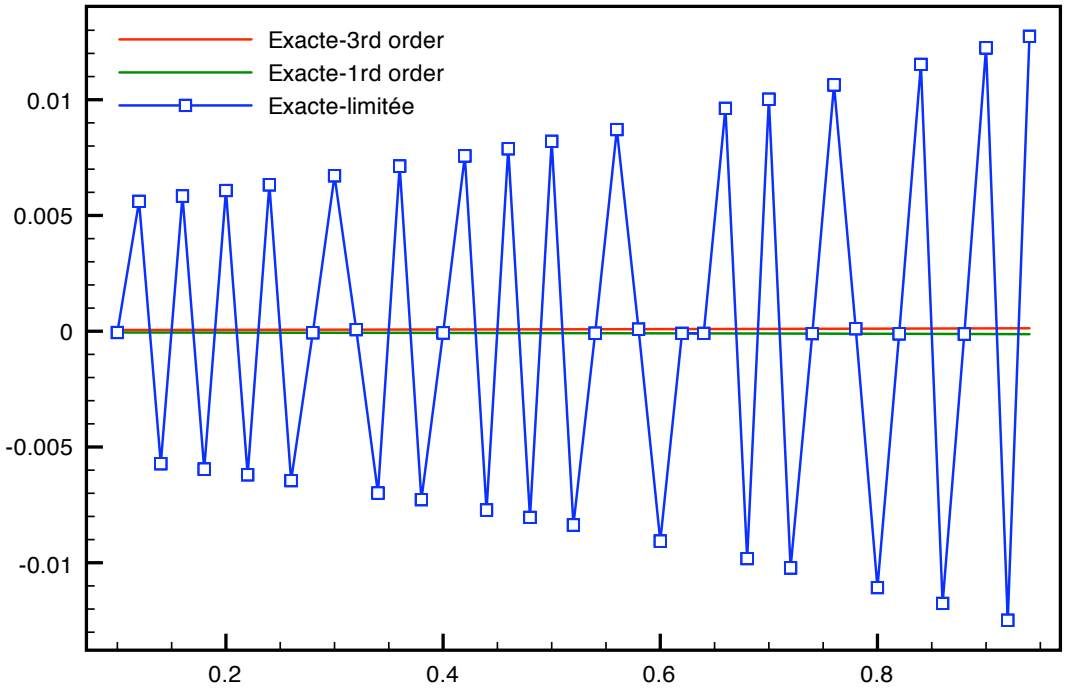


FIG. 5.12 – Différences de température entre la solution exacte et les simulations utilisants un schéma d'ordre 1 (courbe verte), un schéma d'ordre 3 (courbe rouge) et le limiteur tout-ou-rien de MARS (courbe bleu) au bout du premier pas de temps.

On effectue une intégration temporelle correspondant à un pas de temps advectif pour le champ de température. Aucune diffusion n'est ajoutée au test. On compare alors la valeur de l'advection pure théorique avec trois méthodes d'advection : un upwind d'ordre 1, un upwind d'ordre 3 et la méthode limiteur "tout-ou-rien" utilisée dans MARS.

Sur la figure 5.12, on a représenté les résultats de ce test. Les courbes donnent la différence de température entre la valeur exacte et la valeur calculée utilisant une des trois méthodes d'advection. La courbe rouge est pour l'utilisation d'un upwind du troisième ordre. La courbe verte est le résultat pour l'upwind du premier ordre. Enfin, la courbe bleu donne le résultat pour l'utilisation du limiteur de MARS.

On voit que les différences entre la solution exacte et les solutions sans limiteur sont faibles, de l'ordre de 10^{-4} pour le premier ordre et de 2.10^{-4} pour le troisième ordre. Les erreurs avec le limiteur sont quant à elles de pratiquement 2 ordres de grandeur supérieures. De plus, ces écarts présentent des oscillations entre des valeurs positives et négatives. Si l'on avait advecté un profile de salinité proche de zéro (comme dans le cas de panaches fluviaux), on pourait alors avoir une apparition de valeur négative de salinité. Ce n'est pas souhaitable.

On a donc l'apparition d'oscillations dues au limiteur. Bien entendu, ces oscillations seront advectées au pas de temps suivant en faisant intervenir un upwind d'ordre 1, ce qui aura pour effet de minimiser leur impact. Néanmoins après 20 pas de temps dans nos tests, des oscillations sont toujours visibles. On peut également démontrer que dans certaines configurations certes particulières mais réalistes, le limiteur peut amener le modèle à créer des valeurs négatives (de salinité ou de concentration de substance) dans le cas de front.

Plus encore, le schéma QUICK seul est instable avec un schéma temporel d'Euler. En effet, une étude analytique dans le cas d'une advection à vitesse constante c, montre que le facteur d'amplification du schéma QUICK-Euler est approché aux grandes longeurs d'ondes par $\rho = 1 + \frac{\mu^2}{2}(k\Delta x)^2$ où k est le nombre d'onde et $\mu = c\frac{\Delta t}{\Delta x}$ le nombre de Courant.

Troisième partie

Développements

Chapitre 6

Un nouveau schéma 2D

Sommaire

6.1 Schéma 2D linéarisé 101

6.2 Analyse numérique 102

6.3 Conclusion 103

6.4 Cas test 2D 104

6.4.1 Cas test vortex barotrope 104

6.4.2 Cas test vortex barocline en 2D 108

6.4.3 Cas test Jet barotrope instable 112

6.4.4 Cas réaliste en deux dimensions 115

6.5 Cas test 3D 117

6.5.1 Cas test vortex barocline 117

Afin de répondre aux problèmes soulevés par l'étude du schéma barotrope de MARS dans la partie 3, nous proposons un nouveau schéma numérique.

Celui-ci doit répondre à deux grand objectifs. D'une part, nous cherchons à améliorer les propriétés de dispersion, notamment pour les grandes échelles de résolution. D'autre part, les petites échelles qui sont mal résolues en termes de dispersion doivent être éliminées par un amortissement intrinsèque au schéma numérique. Par ailleurs, la mise au point du schéma doit prendre en compte pleinement l'aspect bidimensionnel des équations barotropes pour leur résolution.

6.1 Schéma 2D linéarisé

La forme linéarisée du nouveau schéma est donnée ci-dessous. Le passage du temps n au temps $n+1$ est décomposé en deux étapes. Au cours de la première, on résout les équations au temps $n+\frac{1}{2}$ pour $(\zeta, \bar{u})$ puis

$(\zeta, \bar{v})$. La seconde étape est symétrique, on résout au temps $n+1$ pour $(\zeta, \bar{v})$ puis $(\zeta, \bar{u})$:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \bar{u}^{n+\frac{1}{2},*} & = & \bar{u}^n - \frac{1}{2}i\Delta t(u_0k_x + v_0k_y)\,\bar{u}^n - \frac{1}{2}igk_x\Delta t\,\zeta^n \\ \bar{v}^{n+\frac{1}{2},*} & = & \bar{v}^n - \frac{1}{2}i\Delta t(u_0k_x + v_0k_y)\,\bar{v}^n - \frac{1}{2}igk_y\Delta t\,\zeta^n \end{array}\right. \tag{6.1}$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} \zeta^{n+\frac{1}{2},*} & = & \zeta^n - \frac{1}{2}ih_0k_x\Delta t\left(\alpha\,\bar{u}^n + (1-\alpha)\,\bar{u}^{n+\frac{1}{2}}\right) \\ & & \quad - \frac{1}{2}ih_0k_y\Delta t\left(\alpha\,\bar{v}^n + (1-\alpha)\,\bar{v}^{n+\frac{1}{2},*}\right) \\ & & \quad - \frac{1}{2}i\Delta t(u_0k_x + v_0k_y)\,\zeta^n \\ \bar{u}^{n+\frac{1}{2}} & = & \bar{u}^n - \frac{1}{2}igk_x\Delta t\Big(\alpha\,\zeta^n + (1-\alpha)\,\zeta^{n+\frac{1}{2},*}\Big) \\ & & \quad - \frac{1}{2}i\Delta t(u_0k_x + v_0k_y)\left(\alpha\,\bar{u}^n + (1-\alpha)\,\bar{u}^{n+\frac{1}{2},*}\right) \end{array}\right. \tag{6.2}$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} \zeta^{n+\frac{1}{2}} & = & \zeta^n - \frac{1}{2}ih_0k_x\Delta t\left(\alpha\,\bar{u}^n + (1-\alpha)\,\bar{u}^{n+\frac{1}{2}}\right) \\ & & \quad - \frac{1}{2}ih_0k_y\Delta t\left(\alpha\,\bar{v}^n + (1-\alpha)\,\bar{v}^{n+\frac{1}{2}}\right) \\ & & \quad - \frac{1}{2}i\Delta t(u_0k_x + v_0k_y)\,\left(\alpha\,\zeta^n + (1-\alpha)\,\zeta^{n+\frac{1}{2},*}\right) \\ \bar{v}^{n+\frac{1}{2}} & = & \bar{v}^n - \frac{1}{2}igk_y\Delta t\Big(\alpha\,\zeta^n + (1-\alpha)\,\zeta^{n+\frac{1}{2}}\Big) \\ & & \quad - \frac{1}{2}i\Delta t(u_0k_x + v_0k_y)\left(\alpha\,\bar{v}^n + (1-\alpha)\,\bar{v}^{n+\frac{1}{2},*}\right) \end{array}\right. \tag{6.3}$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} \bar{u}^{n+1,*} & = & \bar{u}^{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}i\Delta t(u_0k_x + v_0k_y)\,\bar{u}^{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}igk_x\Delta t\,\zeta^{n+\frac{1}{2}} \\ \bar{v}^{n+1,*} & = & \bar{v}^{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}i\Delta t(u_0k_x + v_0k_y)\,\bar{v}^{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}igk_y\Delta t\,\zeta^{n+\frac{1}{2}} \end{array}\right. \tag{6.4}$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} \zeta^{n+1,*} & = & \zeta^{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}ih_0k_x\Delta t\left(\alpha\,\bar{u}^{n+\frac{1}{2}} + (1-\alpha)\,\bar{u}^{n+1,*}\right) \\ & & \quad - \frac{1}{2}ih_0k_y\Delta t\left(\alpha\,\bar{v}^{n+\frac{1}{2}} + (1-\alpha)\,\bar{v}^{n+1}\right) \\ & & \quad - \frac{1}{2}i\Delta t(u_0k_x + v_0k_y)\,\zeta^{n+\frac{1}{2}} \\ \bar{v}^{n+1} & = & \bar{v}^{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}igk_y\Delta t\Big(\alpha\,\zeta^{n+\frac{1}{2}} + (1-\alpha)\,\zeta^{n+1,*}\Big) \\ & & \quad - \frac{1}{2}i\Delta t(u_0k_x + v_0k_y)\,\left(\alpha\,\bar{v}^{n+\frac{1}{2}} + (1-\alpha)\,\bar{v}^{n+1,*}\right) \end{array}\right. \tag{6.5}$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} \zeta^{n+1} & = & \zeta^{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}ih_0k_x\Delta t\left(\alpha\,\bar{u}^{n+\frac{1}{2}} + (1-\alpha)\,\bar{u}^{n+1}\right) \\ & & \quad - \frac{1}{2}ih_0k_y\Delta t\left(\alpha\,\bar{v}^{n+\frac{1}{2}} + (1-\alpha)\,\bar{v}^{n+1}\right) \\ & & \quad - \frac{1}{2}i\Delta t(u_0k_x + v_0k_y)\,\left(\alpha\,\zeta^{n+\frac{1}{2}} + (1-\alpha)\,\zeta^{n+1,*}\right) \\ \bar{u}^{n+1} & = & \bar{u}^{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}igk_x\Delta t\Big(\alpha\,\zeta^{n+\frac{1}{2}} + (1-\alpha)\,\zeta^{n+1}\Big) \\ & & \quad - \frac{1}{2}i\Delta t(u_0k_x + v_0k_y)\,\left(\alpha\,\bar{u}^{n+\frac{1}{2}} + (1-\alpha)\,\bar{u}^{n+1,*}\right) \end{array}\right. \tag{6.6}$$

Les étapes (6.1) et (6.4) sont des mises à jour explicites des vitesses barotropes $\bar{u}$ et $\bar{v}$, servant de prédictions pour le calcul des termes de transport dans les étapes (6.2)–(6.3) puis (6.5)–(6.6).

L'ensemble nécessite deux calculs explicites pour les vitesses ainsi que la résolution de quatre systèmes linéaires tridiagonaux. Il est possible de faire varier le paramètre α, ce qui permet de modifier les qualités numériques du schéma.

6.2 Analyse numérique

Nous avons vu dans la partie 3.1.7, ainsi que dans l'analyse 2D du schéma de MARS dans la partie 3.4, que pour les équations barotropes bidimensionnelles, la relation de dispersion possède trois solutions et donc que la matrice d'amplification du schéma numérique possède trois valeurs propres dont les valeurs théoriques peuvent s'écrire de la manière suivante :

$$\begin{array}{rcl} \lambda_e^{\pm} & = & e^{-i\left(\mathbf{Fr}\cdot\vec{\gamma} \pm \sqrt{\gamma_x^2+\gamma_y^2}\right)} \\ \lambda_e^{3} & = & e^{-i\,\mathbf{Fr}\cdot\vec{\gamma}} \end{array}$$

où $\mathbf{Fr} = (\frac{u_0}{c}, \frac{v_0}{c})^T$ est le vecteur de nombre de Froude et $\vec{\gamma} = c\,\mathbf{k}\Delta t = (\gamma_x, \gamma_y)^T$ est un vecteur de variables exprimées en radians.

Pour l'analyse bidimensionnelle, on définit le vecteur d'onde $\mathbf{k} = (k_x, k_y)^T$ et le vecteur vitesse $\mathbf{u}_0 = (u_0, v_0)^T$ dans des coordonnées polaires :

$$k_x \;=\; k\,\cos\theta\;, \qquad k_y \;=\; k\,\sin\theta \tag{6.7}$$

$$u_0 \;=\; w\,\cos\theta\;, \qquad v_0 \;=\; w\,\sin\theta \tag{6.8}$$

où k et w sont leur normes respectives ; ils sont donc colinéaires. On définit ensuite le nombre γ exprimé en radians et le nombre de Froude :

$$\gamma \;=\; c\,k\Delta t\;, \qquad Fr \;=\; \tfrac{w}{c} \tag{6.9}$$

Ordre : Le schéma est globalement d'ordre 2 si l'on fixe le paramètre $\alpha = \frac{1}{2}$; il est d'ordre 1 sinon.

Stabilité : Cependant, une condition nécessaire pour que le schéma soit stable est $\alpha < \frac{1}{2}$. Pour $\alpha \geq \frac{1}{2}$, le module des valeurs propres λ^- et λ^3 est plus grand que 1 dès que $Fr > 0$ et le schéma numérique est alors instable.

Cas limite $Fr = 0$: La figure 6.1 montre le résultat de l'analyse 1D du nouveau schéma barotrope pour une composante zonale ($\theta = 0$) et une linéarisation autour d'une vitesse nulle ($Fr = 0$). Les deux graphiques de la colonne gauche montrent le module des valeurs propres $\lambda^\pm$ tracé en fonction de la variable γ tandis que ceux de la colonne droite représentent le rapport :

$$R^\pm = \frac{\arg(\lambda_G^\pm)}{\arg(\lambda_e^\pm)}$$

entre les vitesses de phase numérique et théorique.

Les courbes en trait fin correspondent au nouveau schéma numérique, tandis que celles en trait gras correspondent au schéma original de MARS, étudié dans la partie 3.2. Nous observons que contrairement à ce dernier, le nouveau schéma barotrope amortit sensiblement les petites échelles, et ce d'autant plus que la valeur du paramètre α est proche de 0. Pour ce cas limite, l'erreur de dispersion est sensiblement la même que pour le schéma original. En revanche, pour des valeurs α plus proches de $\frac{1}{2}$, les grandes échelles ont une vitesse de phase bien meilleure.

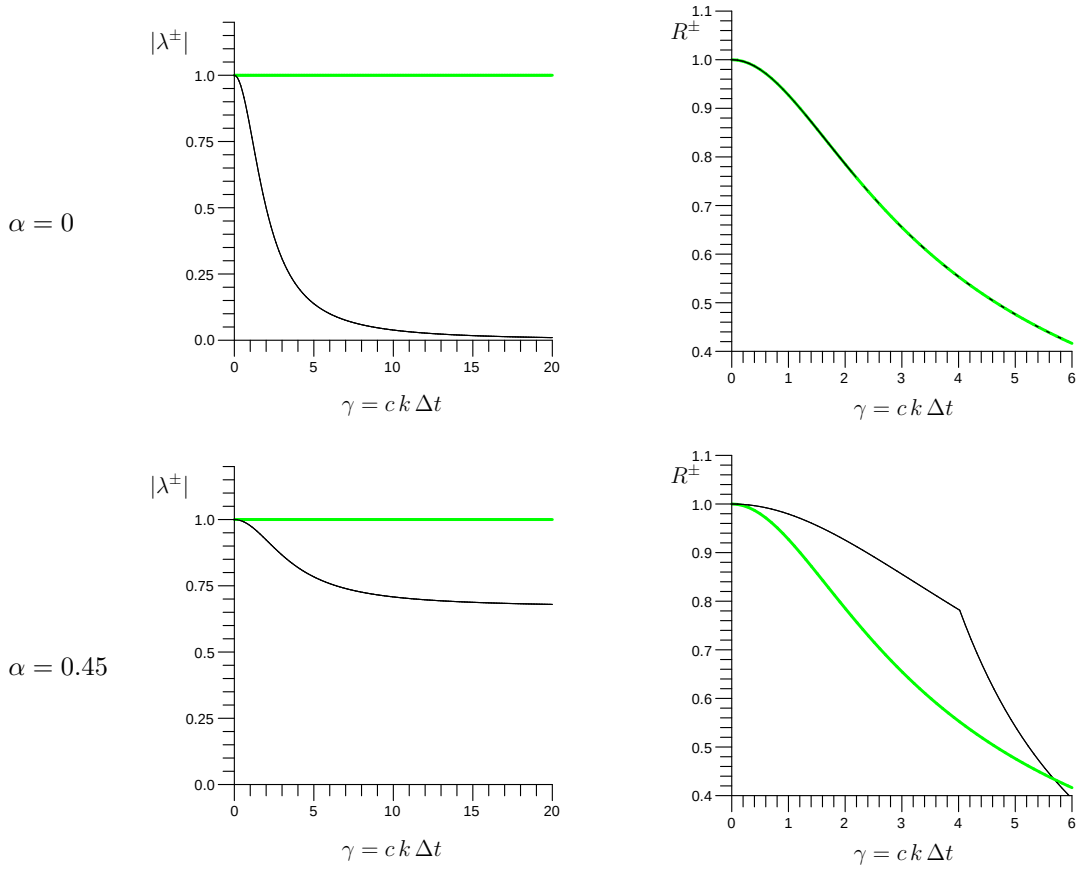
Exemples numériques pour $Fr \neq 0$: Sur la figure 6.2 sont tracés en fonction de γ le module des valeurs propres λ_G (à gauche) ainsi que le rapport R entre les vitesses de phase numérique et théorique (à droite) pour $Fr = \frac{1}{20}$ et pour différentes valeurs du paramètre α : 0, 0.45 et 0.5. La direction d'analyse correspond à une composante zonale ($\theta = 0$). Les valeurs propres $\lambda_G^\pm$ sont représentées en trait continu fin tandis que la troisième valeur propre λ_G^3 est tracée en trait continu gras. Sur la figure 6.3, nous avons la même chose pour une direction d'analyse diagonale ($\theta = \frac{\pi}{4}$).

6.3 Conclusion

Le nouveau schéma barotrope proposé ici permet de résoudre les deux problèmes soulevés dans l'analyse du schéma de MARS. Tout d'abord, il est possible d'améliorer considérablement les propriétés de dispersion des grandes échelles en choisissant une valeur du paramètre α proche de (mais inférieure à) $\frac{1}{2}$.

Ensuite, le schéma permet de dissiper les petites échelles qui sont mal résolues en termes de dispersion, et ce d'autant plus que le paramètre α est proche de 0. Il propose donc un compromis entre une bonne résolution des grandes échelles et un amortissement des petites échelles.

Par ailleurs, sa construction reposant sur une résolution en alternance des vitesse zonale et méridienne lui permet de conserver ses bonnes propriétés dans toutes les directions.



(a) Module (b) Argument

FIG. 6.1 – Module et argument des valeurs propres en fonction de $\gamma = c\,k\Delta t$ pour $Fr = 0$, $\alpha = 0$ (en haut) et $\alpha = 0.45$ (en bas). Trait fin : nouveau schéma ; trait gras : schéma original de MARS.

6.4 Cas test 2D

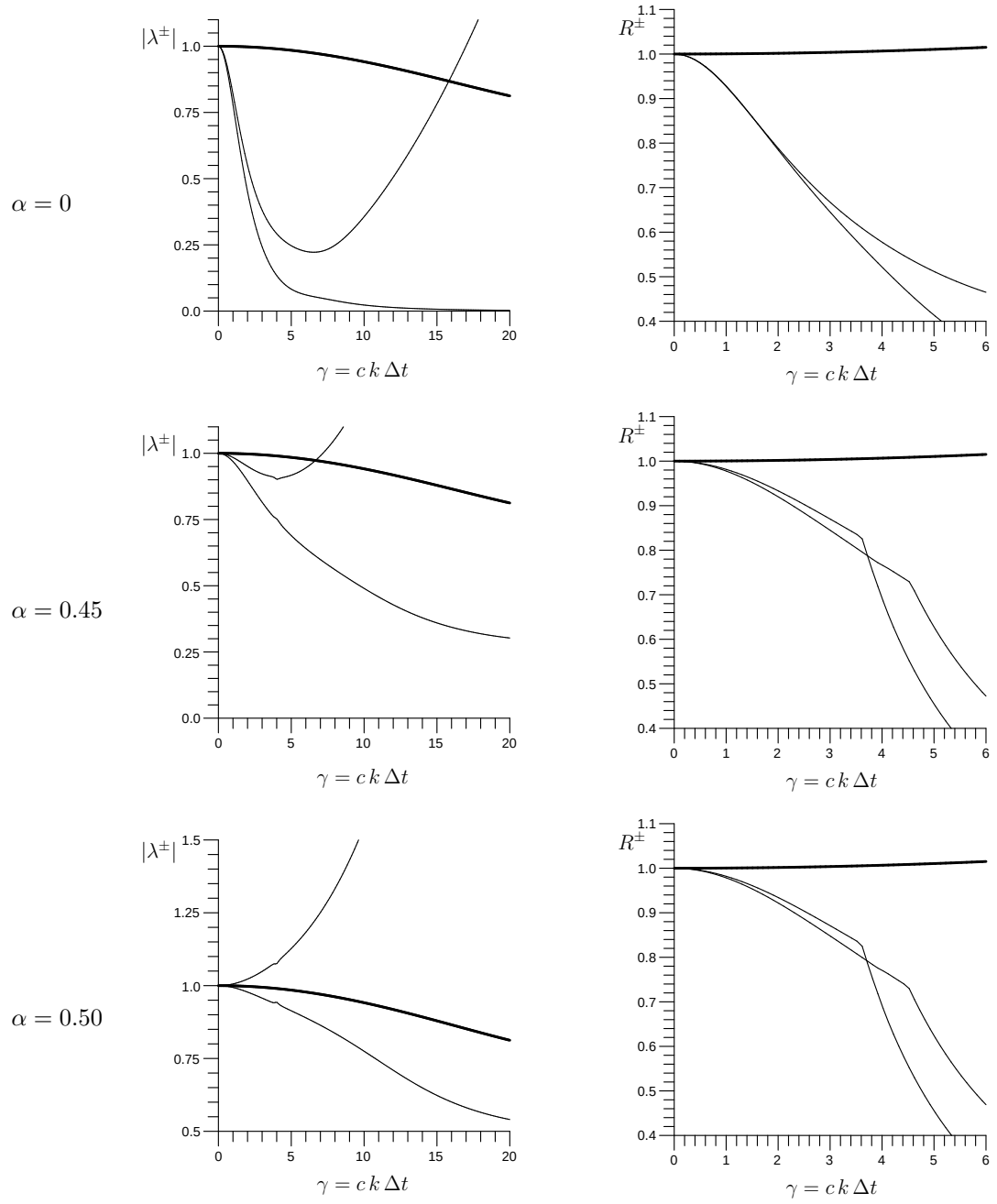
Pour tester le nouveau schéma nous avons passé en revue l'ensemble des cas test idéaliés développés au cours de cette étude : en deux dimensions les vortex barotrope et barocline (la version où l'on initialise les champs 2D avec uniquement la surface libre et les vitesses barotropes), le jet barotrope instable ainsi qu'une version simple du rang 0 de la configuration de la Manche en réaliste.

6.4.1 Cas test vortex barotrope

Tout d'abord comparons les résultats pour le cas du vortex barotrope en équilibre cyclo-géostrophique. Sur la figure 6.4 on peut voir les résultats de simulation pour le schéma de MARS standard et pour le nouveau schéma pour les jours 100, 300 et 600. Les panneaux (a), (c) et (e) donnent les résultats pour MARS, alors que les panneaux (b),(d) et (f) donnent ceux pour le nouveau schéma.

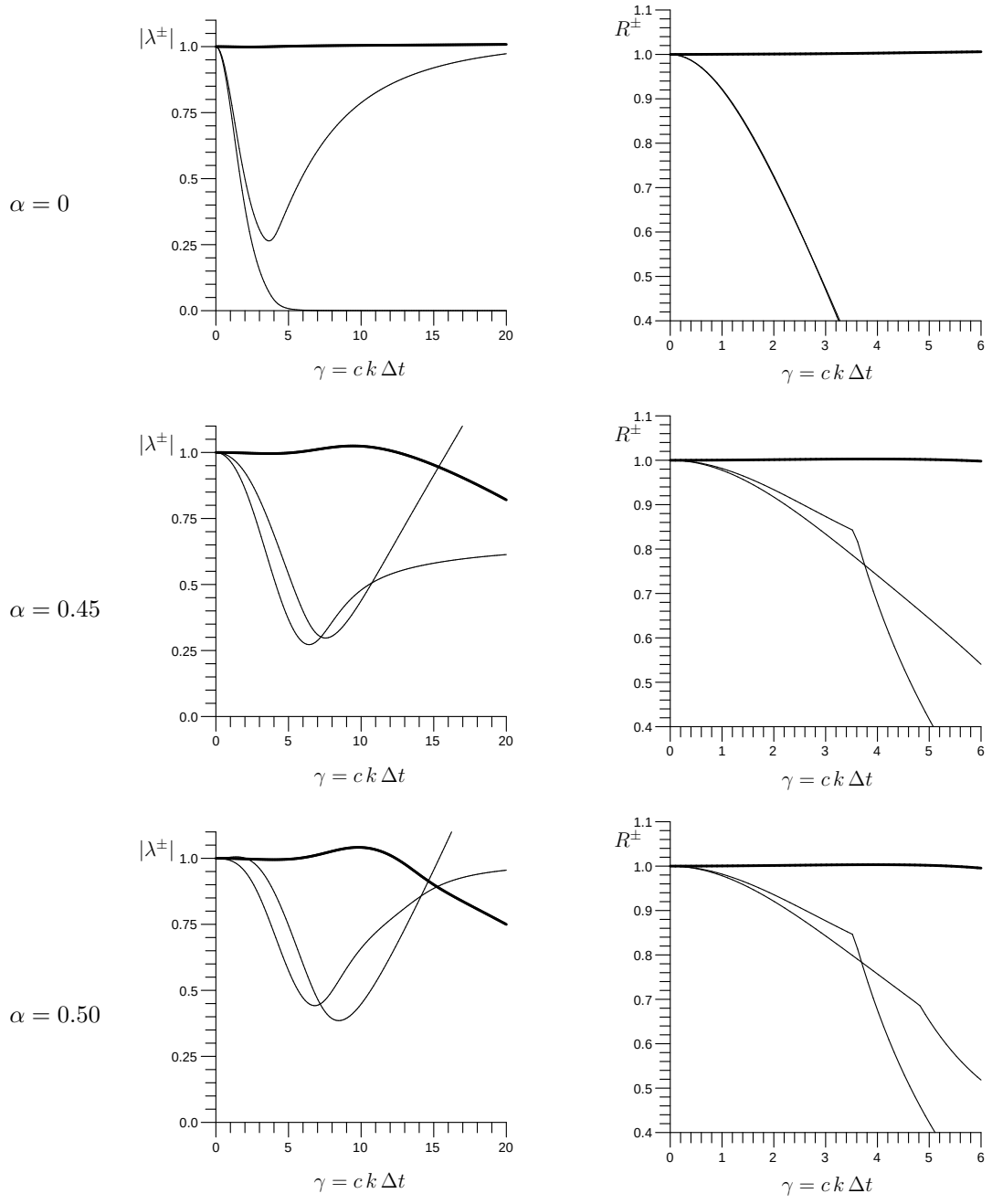
Déjà, on remarque sur le panneau (b), qu'au bout de 100 jours de simulation, le vortex ne développe plus de satellites comme dans le schéma standard. On rappelle que dans ce cas test on s'attend à ce que le vortex reste parfaitement stable au cours du temps. Dans le nouveau schéma, on peut voir sans ambiguité que le vortex conserve assez bien sa structure au cours des 600 jours de la simulation. C'est un résultat très satisfaisant.

Les comparaisons avec le schéma standard montrent les bénéfices de la nouvelle formulation. Sur les premiers jours de simulation (cf les figures du chapitre sur la description du cas test du Vortex barotrope) on observait dans le cas du MARS standard un bruit important sur la surface libre. Dans le cas du nouveau schéma ce bruit est inexistant, la solution est beaucoup plus propre. Ces petites échelles sont maintenant systématiquement filtrées de manière implicite par le schéma.



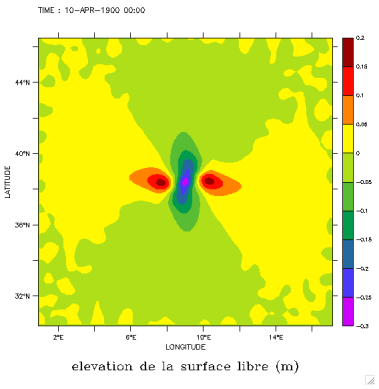
(a) Module (b) Argument

FIG. 6.2 – Module et argument des valeurs propres en fonction de $\gamma = c\,k\Delta t$ pour $Fr = 0.05$, $\theta = 0$ et différentes valeurs de α. Trait fin : $\lambda_G^{\pm}$; trait gras : λ_G^3.

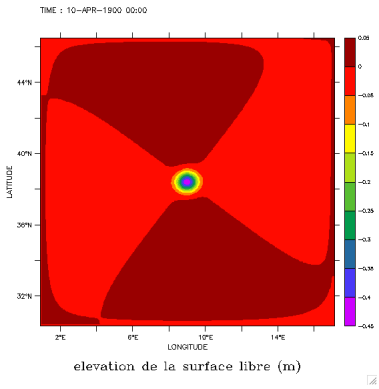


(a) Module (b) Argument

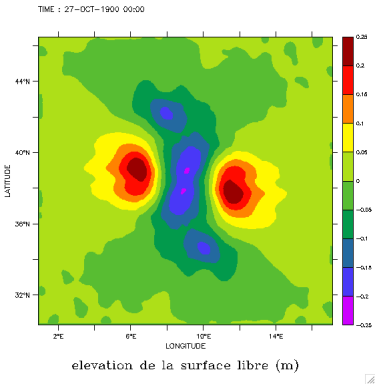
FIG. 6.3 – Module et argument des valeurs propres en fonction de $\gamma = c\,k\Delta t$ pour $Fr = 0.05$, $\theta = \frac{\pi}{4}$ et différentes valeurs de α. Trait fin : $\lambda_G^{\pm}$; trait gras : λ_G^3.



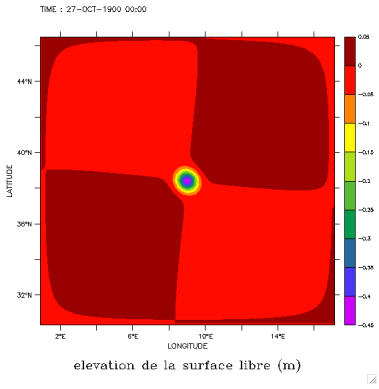
(a) Jour 100 MARS



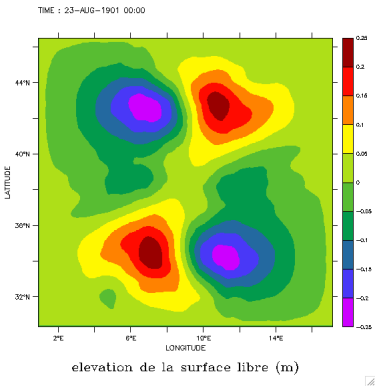
(b) Jour 100



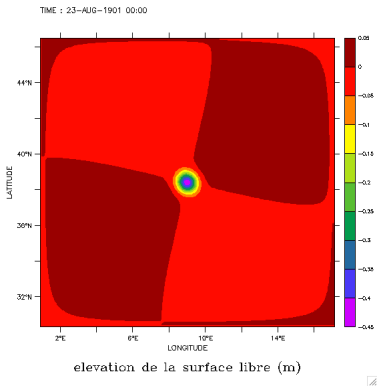
(c) Jour 300 MARS



(d) Jour 300

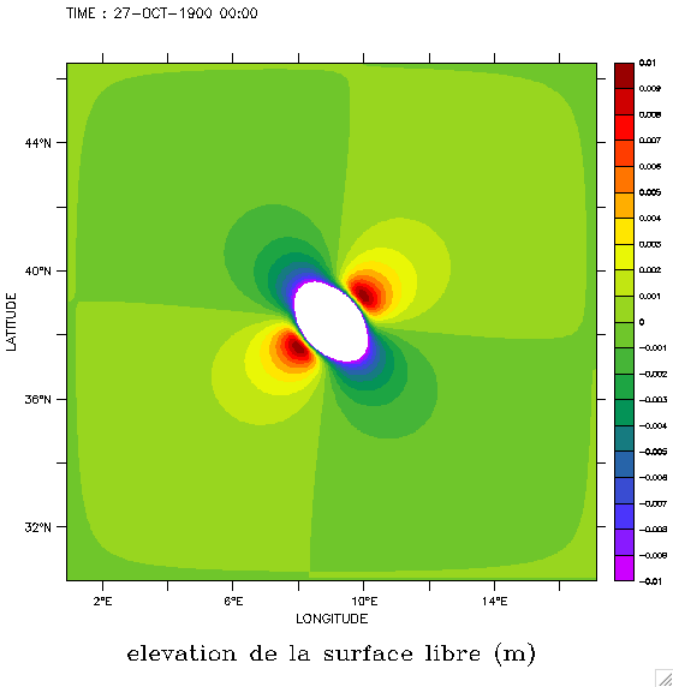


(e) Jour 600 MARS



(f) Jour 600

FIG. 6.4 – Surface libre du cas test vortex barotrope pour les jours simulés 100, 300 et 600, pour le schéma standard de MARS (a, c et e) et pour le nouveau schéma (b, d et f).



(a) Jour 300

FIG. 6.5 – Zoom sur les valeurs de surface libre comprises entre -0.01 et 0.01 m pour le jour 300 de la simulation réalisée avec le nouveau schéma.

Cependant, une observation plus fine des résultats apporte un petit bémol au niveau de la qualité de la solution. Figure 6.5 on a représenté uniquement la partie du signal compris entre -0.01 et 0.01 m pour le nouveau schéma au 300 ème jour de la simulation. Sur cette figure on voit clairement que le vortex n'est plus parfaitement circulaire. Cet écrasement de la structure est vraisemblablement lié la présence des deux satellites que l'on peut observer. Le d'éveloppement de ces petites structures est observable avec cette échelle à partir du 20 ème jour de la simulation. Puis peu à peu l'intensité augmente jusqu'au 80 ème jour. Au delà, l'intensité de ces structure reste stable.

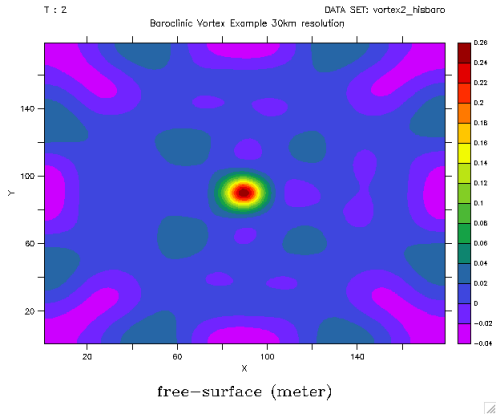
Dans le MARS standard on observe le même type de comportement. Les structures sattellitaires sont observables dans les résultats de MARS. Elles y apparaissent plus tardivement soit au allentour du 40ème jour. Mais cette fois, les structures augementent plus en intensité et finissent par déstabiliser complétement le vortex central comme le montre les panneaux (a), (c) et (e) de la figure 6.4.

Evidement la solution n'est pas parfaite, néanmoins pour de grande valeur de pas de temps, on parvient à obtenir une solution conforme à la solution analytique. Le schéma propose une solution avec une surface libre beaucoup moins bruité par rapport à la solution de MARS standard et la dispersion de la solution est bien meilleure (analytiquement et dans les tests sur les cas test). D'ailleurs dans le cas test du vortex barocline les résultats démontrent que le nouveau schéma améliore considérablement la dispersion du schéma standard de MARS.

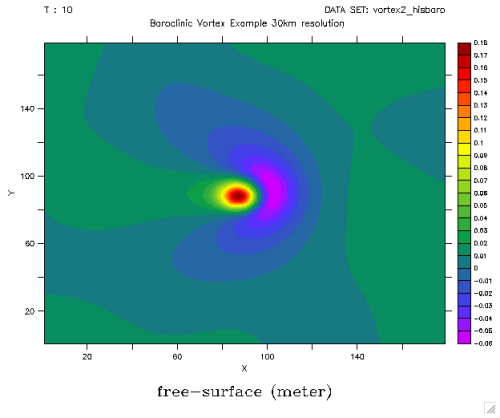
6.4.2 Cas test vortex barocline en 2D

On a donc simulé le cas test du vortex barocline en deux dimensions. On rappelle que ce cas test consiste à initialiser la surface libre et les champs de vitesse avec la surface libre et les vitesses barotropes du cas test du vortex barocline qui est définie en trois dimensions. Ainsi comme on l'a déjà vu précédement, ce vortex n'est pas en équilibre à l'instant initial. L'ajustement de ce dernier se fait aux premiers jours de la simulation. Puis l'on s'attend à observer une propagation vers le sud-ouest du à la conservation de la vorticité du tourbillon anti-cyclonique. C'est ce que l'on observait dans les résultats de ROMS (avec un pas de temps de 25 secondes) et pour MARS avec un pas de temps de 50 secondes et une valeur de paramètre $\alpha_1 = 1$.

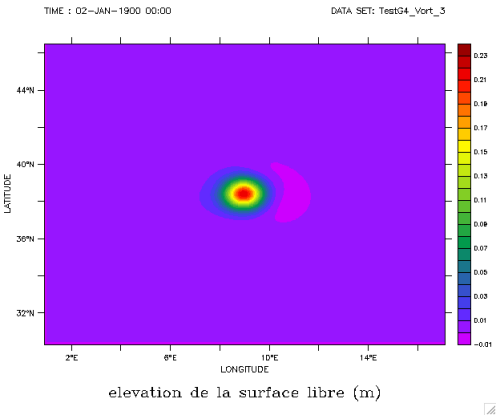
Ici on conserve la valeur de pas de temps de 960 secondes comme dans le cas test barocline. On réalise



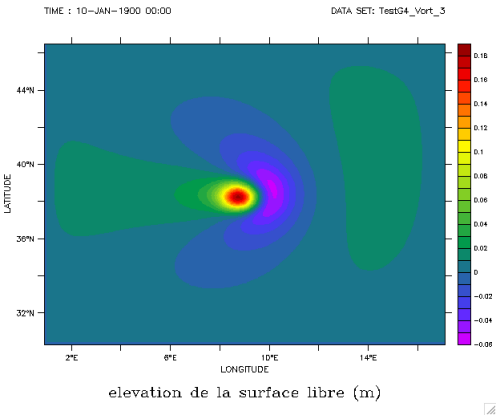
(a) Jour 2 ROMS



(b) Jour 10 ROMS

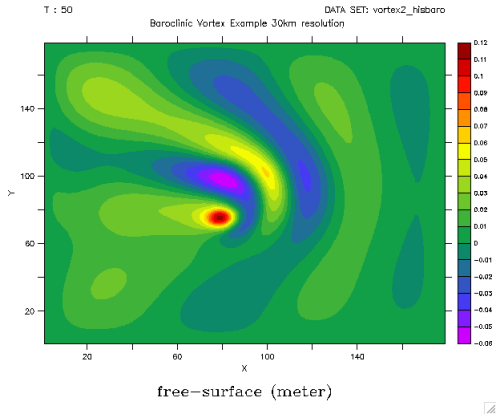


(c) Jour 2 Schéma G2

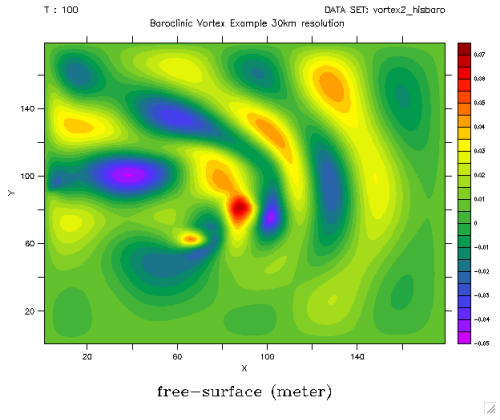


(d) Jour 10 Schéma G2

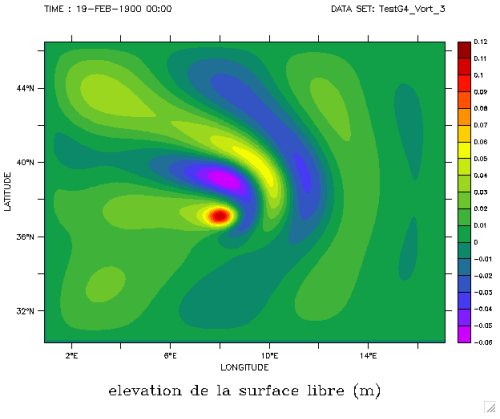
FIG. 6.6 – Surface libre du cas test Vortex Barocline dans ROMS pour le cas où seul la dynamique est utilisée en 2D pour les jours 2(a) et 10(b) pour ROMS ainsi que les jours de la simulation correspondants pour le nouveau schéma (2(c) et 10(d)). On initialise la surface libre et les vitesses barotropes avec les valeurs correspondantes du calcul 3D.



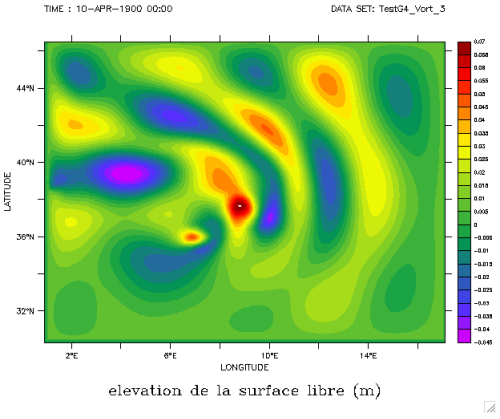
(a) Jour 50 ROMS



(b) Jour 100 ROMS

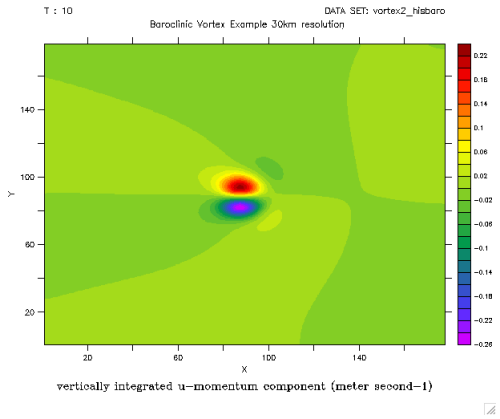


(c) Jour 50 Schéma G2

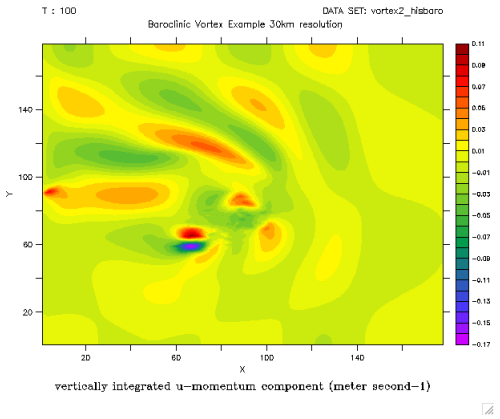


(d) Jour 100 Schéma G2

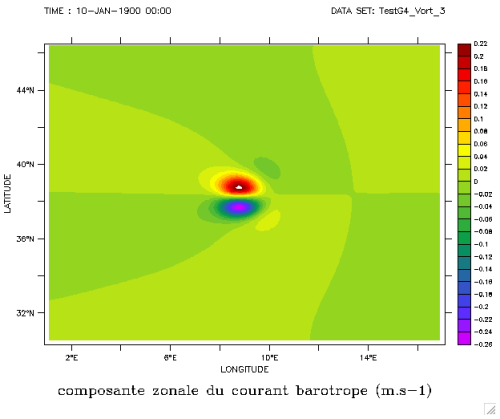
FIG. 6.7 – Surface libre du cas test Vortex Barocline dans ROMS pour le cas où seul la dynamique est utilisée en 2D pour les jours 50(a) et 100(b) pour ROMS ainsi que les jours de la simulation correspondants pour le nouveau schéma (50(c) et 100(d)). On initialise la surface libre et les vitesses barotropes avec les valeurs correspondantes du calcul 3D.



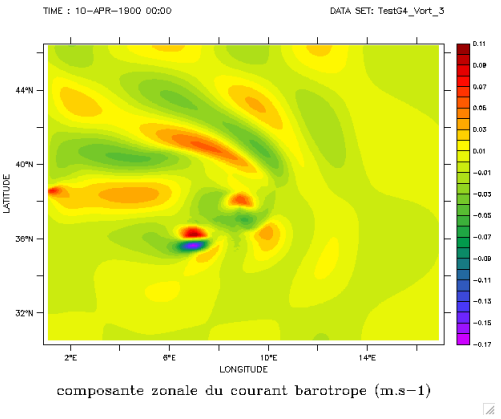
(a) Jour 10 ROMS



(b) Jour 100 ROMS



(c) Jour 10 Schéma G2



(d) Jour 100 Schéma G2

FIG. 6.8 – Vitesse zonale barotrope du cas test Vortex Barocline dans ROMS et dans le nouveau schéma pour le cas où seul la dynamique est utilisée en 2D pour les jours 10(a) et 100(b) de la simulation dans ROMS et pour les jours 10(c) et 100(d) de la simulation dans le nouveau schéma.

alors 100 jours de simulation avec le nouveau schéma temporel. On compare alors les champs de surface libre et de vitesse pour cette simulation et celle faite avec ROMS qui sert de référence. Sur les figure 6.6 et 6.7 on peut voir les champs de surface libre pour les deux simulations à différents aux jours 2, 10, 50 et 100 des simulations. La figure 6.8 donne la comparaison sur le champ de vitesse zonale pour les jours 10 et 100 simulés.

La comparaison entre les deux simulations pour la surface libre et les champs de vitesses zonales montrent que les résultats sont quasiment identiques dans les deux codes. C'est ce que l'on espérait pour le nouveau schéma. A la différence du code de MARS original, déjà on voit que la surface libre n'est plus bruité. Bien entendu, on résoudre le problème du bruit dans le champs de surface libre en implicitant complétement le terme de gradient de pression externe dans la discrétisation de la conservation de la quantité de mouvement dans MARS ($\alpha_1 = 1$).

Sur les premiers jours de simulation (figure 6.6) on voit qu'il y a une différence entre les deux simulations. Les résultats pour le nouveaux schéma présentent moins de bruit numérique que dans ROMS pour le jour 2 de la simulation. Ce n'est pas totalement significatif, c'est possiblement le reflet que le nouveau schéma filtre plus rapidement les petites échelles que ne le fait le schéma de ROMS. Cela reste purement spéculatif. Pour les jours suivants, les différences sont beaucoup moins visibles. Figure 6.7, on remarque que les deux simulations donnent une surface libre avec le même comportement. Les différences sont visiblent au niveau des maximums d'intensité. En effet, pour le 100 ème jour de simulation on peut observer que le nouveau schéma donne une intensité maximum supérieure de quelques millimètres . Ces différences restent très faibles.

Sur les champs de surface libre, on voit déjà que la propagation du vortex est conforme à la simulation de référence. Cette propagation est mieux mis en évidence sur le champs des vitesses zonales 6.8. On obtient exactement la même propagation pour ROMS et pour le nouveau schéma . La grande différence est que dans le cas de notre nouveau schéma le pas de temps est de 960 secondes contre 25 dans la simulation avec ROMS (ou 50 secondes pour celle avec MARS standard) pour avoir la même propagation. Ainsi la dispersion est nettement améliorée dans cette nouvelle configuration. Là où MARS bloquait complétement la propagation des petites ondes, le nouveau schéma les transportent correctement. De plus les ondes non significatives, les plus petites, sont complétement atténuées par le schéma.

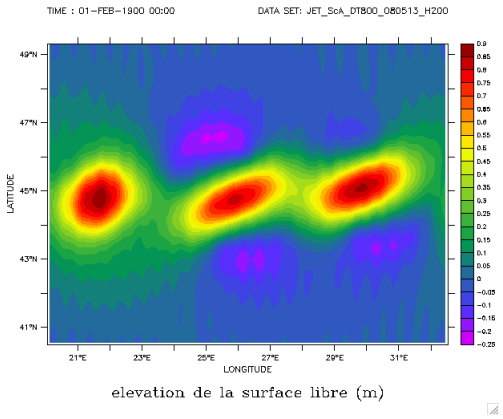
Ainsi, les cas tests précedants confirment les résultats de l'étude analytique du schéma. En effet, la dispersion est grandement amélioré par rapport au schéma de MARS standard. Cela qui permet aux ondes de se propager de manière plus réaliste sur un spectre plus important. Le nouveau schéma dissipe les petites échelles qui, à priori, ne sont pas physique ce qui améliore l'état de la surface libre. Ces améliorations se font pour de grandes valeurs de pas de temps, et sont de plus relativement peu gourmande en temps de calcule car un simple calcul explicite de vitesse à un temps intermédiaire est ajouté dans le calcul. C'est exactement ce que l'on voulait obtenir : une grande amélioration des propriétés du schéma sans radicalement sacrifier le temps de calcul.

L'analyse théorique du nouveau schéma a montré que ce dernier n'est pas inconditionnellement stable. Pour tester expérimentalement ce résultat nous avons fait quelques simulations en prenant pour valeur de pas de temps 1500 et 2000 secondes. Pour 1500 secondes les résultats sont quasiment identique à ceux obtenus pour un pas de temps de 960 secondes. Le champs de vitesse présente quand même des différence d'intensité de l'ordre de 10 %. Mais globalement la solution reste la même du point de vu de la propagation du vortex sur 100 jours. Quelques petites oscillations sont également visible dans le champ de vitesse. L'amplitude de ces ondes augmentent avec le temps. Elles ont triplé de valeur au bout de 180 jours mais ne semble pas vouloir diverger d'avantage. La solution n'est cependant plus physiquement acceptable. Pour le pas de temps de 2000 secondes, le modèle est alors dans une configuration instable. La solution explose au 21 ème jour.

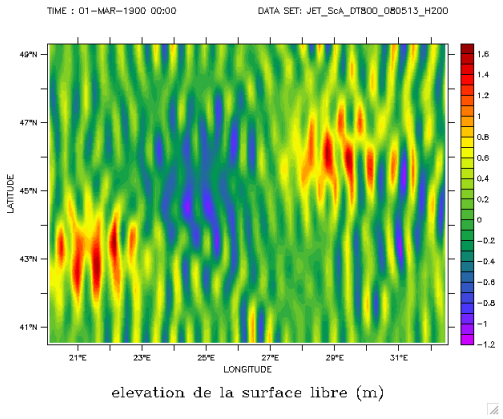
6.4.3 Cas test Jet barotrope instable

Dans ce test, nous allons comparer la stabilité du nouveau schéma par rapport au schéma standard de Mars dans un cas test où ce dernier est instable. Pour cela on utilise le cas test du jet barotrope zonale vérifiant le critère d'instabilité barotrope. Ce cas test, déjà présenté dans la section 2.4, est configuré avec une hauteur d'eau de 200m afin d'avoir un nombre de Froude pas complétement nul. Ici le nombre de Froude a pour valeur 0.03.

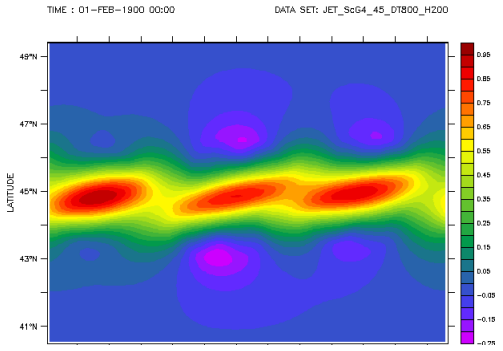
Sur les figures 6.9 et 6.10 on a reporté les résultats pour MARS standard et pour le nouveau schéma pour la surface libre au bout de 32, 60, 80 et 120 jours de simulation. Bien que respectant le critère nécessaire d'instablité barotrope, le jet ne se déstabilise pas rapidement. Il faut environ 20 jours pour commencer à apercevoir une fluctuation dans le champ de surface libre. Ces observations sont faite dans le cas où l'on a



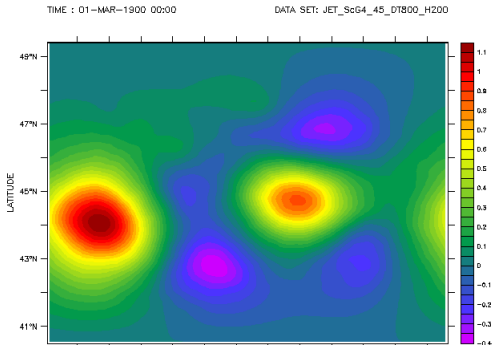
(a) Jour 32 MARS



(b) Jour 60 MARS

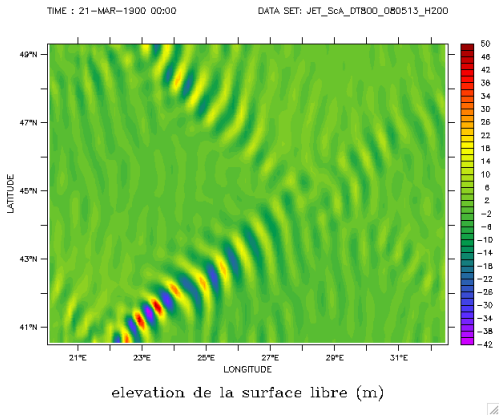


(c) Jour 32 Schéma G2

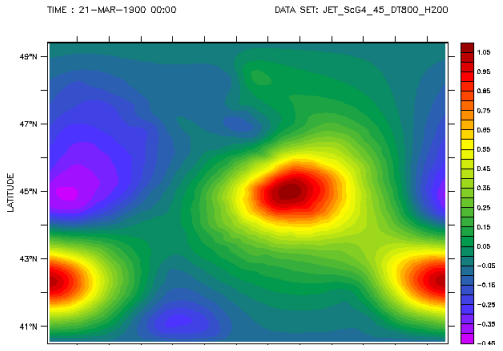


(d) Jour 60 Schéma G2

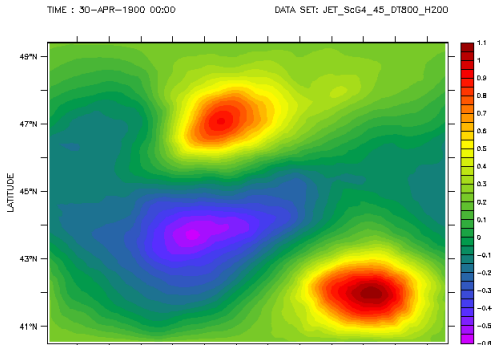
FIG. 6.9 – Surface libre du cas test du jet barotrope instable pour les jours 32 (a) et 60 (b) pour MARS standard ainsi que les jours de la simulation correspondants pour le nouveau schéma (32 (c) et 60 (d)).



(a) Jour 80 MARS



(c) Jour 80 Schéma G2



(d) Jour 120 Schéma G2

FIG. 6.10 – Surface libre du cas test du jet barotrope instable pour les jours 80 (a) pour MARS standard ainsi que les jours de la simulation correspondants pour le nouveau schéma (80 (c) et 120 (d)).

ajouté aléatoirement une faible perturbation (de l'ordre de quelques pourcent) aux champs de vitesses à l'instant initial. Sans ces pertubations, le système ne se déstabilise qu'au bout de 60 jours.

Sur les figures, on voit que le système commence à bien se déstabilisé au bout de 32 jours pour les deux schémas. Entre les deux simulations, l'amplitude du signal est comparable pour le jour 32 de la simulation. Mais déjà les résultats de MARS font apparaître du bruit dans le champ de surface libre. Dans le nouveau schéma, cette oscillation de la solution n'est pas du tout présent.

Ces observations se confirment pour les images pour les jours 60 et 80. L'amplitude des résultats de MARS standard est plus importante que pour le nouveau schéma et les différences augmentent avec le temps. Le schéma standard est instable et la solution finie par exploser au jour 81. Alors que pour le nouveau schéma les champs de surface libre reste plutôt lisse pour les mêmes jours simulés.

En regardant plus en détail, on peut voir que une faible oscillation est présente dans les résultats du nouveau schéma mais ces dernières ne semblent pas se développer au-delà d'une certaine amplitude. Dans ces test on a pris 0.45 pour valeur de α. En faisant le même test mais avec 0 pour la valeur de ce paramètre, la solution est plus lisse. Cependant il reste peut évident de donner une réel comparaison des résultats étant donné que le système testé est justement dans un état instable et que donc on ne possède pas de solution analytique du problème. On ne peut que conclure que sur la meilleur stabilité du nouveau schéma par rapport au MARS standard.

Nous avons également réalisé d'autres test avec ce cas test en augmentant la valeur du nombre de Froude à l'initialisation jusqu'à 0.2. La stabilité du nouveau schéma ne semble pas être affecté par ce dernier ce qui n'est pas le cas pour le schéma standard de MARS. En effet, pour ce dernier, la solution explose plus rapidement si on augmente la valeur du nombre de Froude.

6.4.4 Cas réaliste en deux dimensions

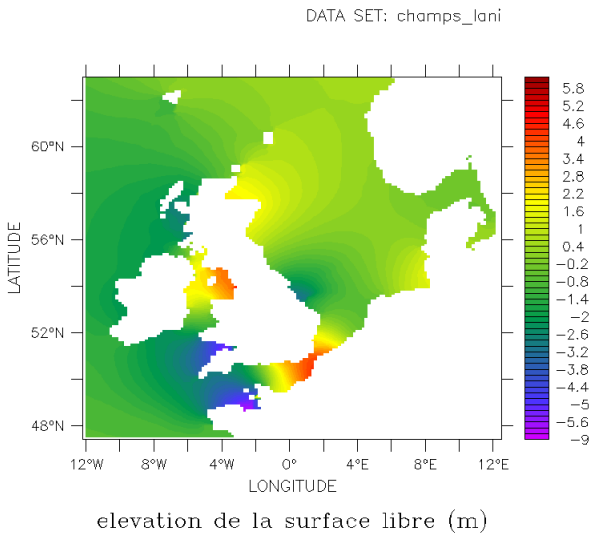
Pour le test en réaliste on se placera dans le cas du rang 0 de la configuration MANCHE en prenant soin de ne pas avoir de bancs découvrants car ils ne sont pas encore intégrés dans le nouveau schéma. On veut néanmoins tester le schéma dans ces conditions difficiles. Ainsi on se place dans le cas extrême où le coefficient de marée est fixé à 120, ce qui constitue le plus haut coefficient possible. Le schéma devra donc traiter le forçage de marée le plus important possible. Dans ces conditions, pour ne pas avoir de bancs découvrants on fixe la hauteur d'eau minimale pour le calcul à 10 m. Ainsi même dans la baie du Mont-Saint-Michel aucun banc découvrant ne devra être traité.

Malgré nos efforts pour faire tourner le nouveau schéma dans la configuration optimale définie par l'analyse de ce dernier, nous ne sommes pas parvenu à un résultat satisfaisant. Il reste en effet un souci de conditions aux limites ouvertes qui rend les résultats instables dans la partie de la mer du nord entourant la Norvège, alors que le calcul dans la zone la plus active (la manche entre l'Angleterre et la France), ne semble souffrir d'aucunes faiblesses.

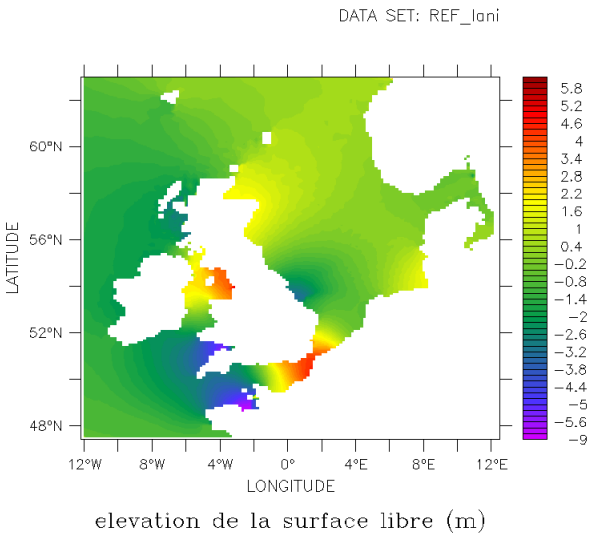
Nous sommes néanmoins parvenus à obtenir des résultats stables en modifiant la première évaluation explicite des vitesses et en prenant une valeur de α nulle. Nous allons donc présenter ces résultats ainsi que la comparaison avec MARS standard dans les mêmes conditions. Figure 6.11, on a reporté sur le panneau (a) le champ de surface libre au bout de 1 mois de simulation pour le schéma G2, sur le panneau (b) le champ de surface libre correspondant pour la simulation avec MARS et sur le panneau (c) ceux sont les différences entre les deux champs.

Au premier regard, on ne note pas de différence majeur entre les deux simulations. Les amplitudes sont globalement les mêmes dans les deux calculs. Mais si l'on regarde la différence des champs il est évident qu'ils ne sont pas identiques. La variation des différences est de l'ordre de +/- 50 cm localement. Ce qui représente une assez forte variation par rapport à la hauteur d'eau moyenne. Globalement, les différences entre les deux champs sont faibles sur la majeur partie de la zone. Dans les zones de fort marnage, la différence représente moins de 10 % du signal de marée. Mais il est difficile de faire une conclusion sur la qualité de la solution du nouveau schéma. Peut-être qu'en faisant une comparaison avec un atlas de marée pourrions-nous avoir de meilleurs arguments.

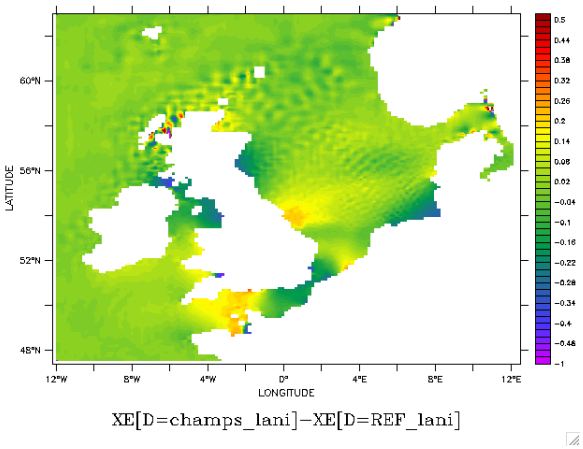
En regardant plus précisément les champs de surface libre, on s'aperçoit que le nouveau schéma donne un résultat plus lisse que celui de MARS. En effet, les iso-contours de surface libre font apparaître dans MARS plus de fines structures que dans le nouveau schéma. Dans la région à la frontière entre la Norvège et la Suéde, on voit une amplitude de marée qui ne semble pas correcte dans MARS. D'autres régions présentent également des petites oscillations du signal. Celles-ci, moins évidentes sur le temps choisi, sont localisées au Nord-Ouest de l'Ecosse (entre les Highlands, l'Ile de Skye et l'Ile de Lewis) ainsi qu'autour des Orcades au Nord-Est. Par contre, sur le champ des différences on voit nettement que le signal est fort dans le Minch



(a) Schéma G2



(b) MARS



(c) Différence schéma G2 - MARS

FIG. 6.11 – Surface libre de la configuration rang 0 de la MANCHE au bout de 30 jours de simulation (a) pour le nouveau schéma et (b) pour MARS standard ainsi que la différence entre les deux champs précédants (c).

(passage entre l'Ile de Lewis et les Highlands). Pour le moment nous n'avons pas d'indices permettant de trouver une explication à ces différences dans les calculs. En regardant plus précisément cette zone, on voit que les oscillations sont présentes dans le champ de surface libre de la simulation faite avec MARS, ces oscillations ne sont pas obtenues avec le nouveau schéma.

Ce que l'on peut conclure pour le moment c'est que le nouveau schéma est satisfaisant globalement sur la zone. Cependant il est difficile de dire si il est meilleur que le schéma standard. Pour cela il faudrait faire des tests plus approfondis en conditions plus réalistes faisant intervenir les autres forçages thermodynamiques et alors comparer avec des observations.

6.5 Cas test 3D

6.5.1 Cas test vortex barocline

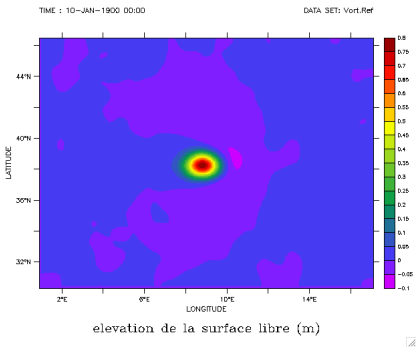
Pour tester le nouveau schéma d'intégration en trois dimensions, nous avons réalisé une simulation dans le cas test du Vortex barocline décrit dans la partie 2.2. Les résultats sont reportés sur les figures 6.12 et 6.13.

Figure 6.12, on présente les résultats de ce cas test pour les modèles MARS, ROMS et pour le nouveau schéma. sur cette figure, on donne les champ de surface libre pour les jours 10 et 100 de la simulation. Pour chacune des simulations, le pas de temps barocline est de 960 secondes. Sur la Figure 6.13, on peut voir les champ de température de la couche de surface pour les mêmes simulations aux mêmes sorties.

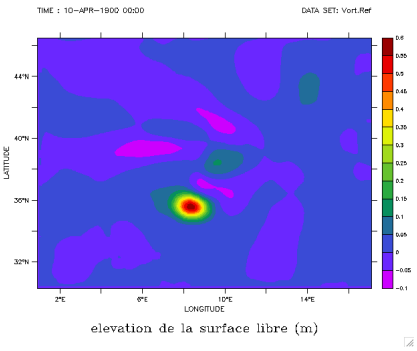
Sur l'ensemble des deux figures, on peut voir que la propagation du vortex qui n'était pas idéale dans MARS, est maintenant quasiment identique dans le cas du nouveau schéma à celle obtenue avec ROMS. Le vortex se déplace désormais de manière plus conforme à la théorie en suivant une trajectoire oblique en direction du sud-ouest. Sur le champ de surface libre, il est même difficile de distinguer les deux dernières simulations. Seule une légére différence au niveau des petites échelles sont notables sur l'ensemble de la simulation. En effet, les champ des résultats avec ROMS présentent de petites oscillations du signal que l'on n'obtient pas avec le nouveau schéma.

Sur les champs de température, quelques différences sont également notables entre ROMS et le nouveau schéma. Il faut cependant noter que les méthodes d'advection dans les deux simulations ne sont pas identiques. Ce qui explique en partie les différences. L'autre point à prendre en compte, c'est que les grilles des deux simulations ne sont pas non plus identiques, ce qui conduit à des champs initiaux légèrement différents. Néanmoins, les aspects du champ de température entre les deux simulations ne sont pas très différents.

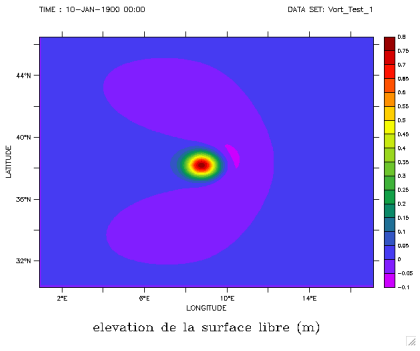
Ainsi le nouveau schéma temporel permet de limiter l'impact de la dispersion sur les petites ondes que le schéma de MARS présentait. Cependant, il n'est pas évident que la dispersion seule soit responsable de mauvaise propagation du vortex dans ce cas test. C'est par contre vraisemblablement une combinaison entre la dispersion et la non atténuation des petites échelles. Dans le nouveau schéma, la dispersion est toujours présente. Par contre, le schéma amortie complétement les petites échelles. Ce qui minimise leur impact dans les termes non-linéaires qui sont en grande partie responsables de la propagation du vortex dans le cas test.



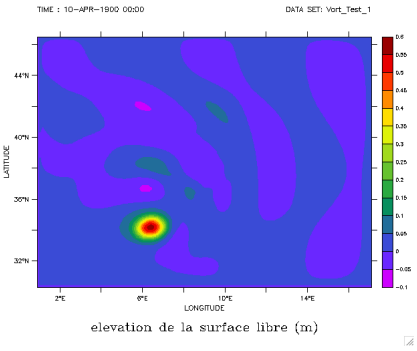
(a) Jour 10 MARS



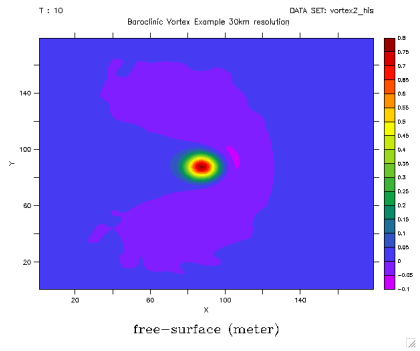
(b) Jour 100 MARS



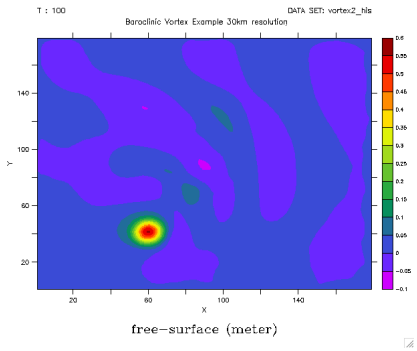
(c) Jour 10



(d) Jour 100

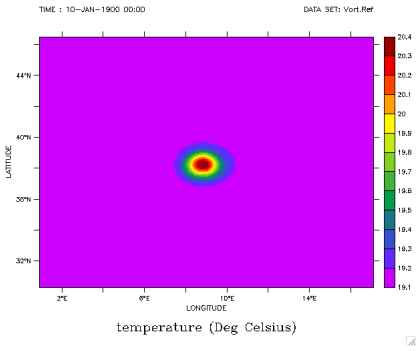


(e) Jour 10 ROMS

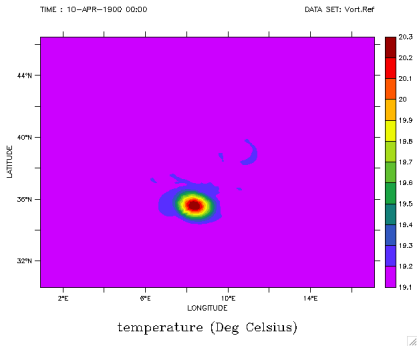


(f) Jour 100 ROMS

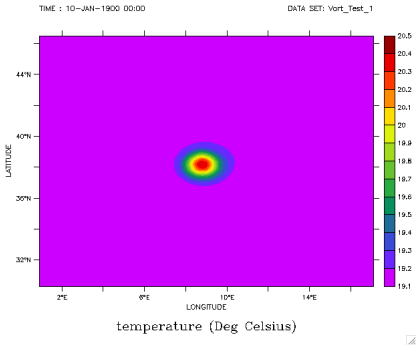
FIG. 6.12 – Surface libre du cas test vortex barocline pour les jours simulés 10 et 100, pour le schéma standard de MARS (a et b), pour le nouveau schéma (c et d) et pour ROMS (e et f).



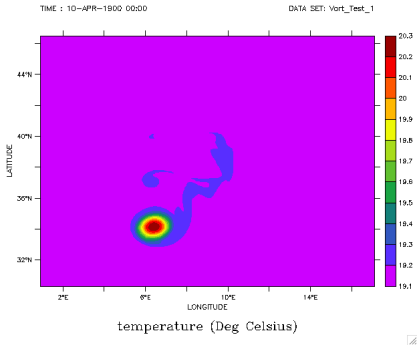
(a) Jour 10 MARS



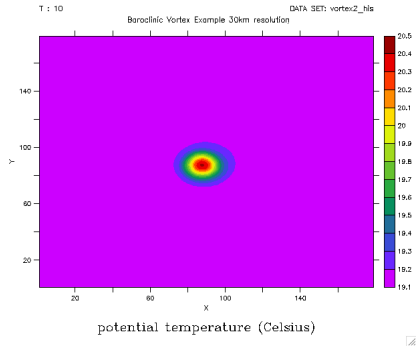
(b) Jour 100 MARS



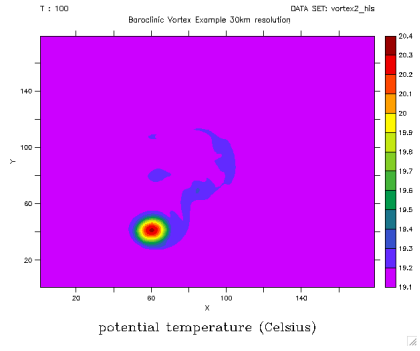
(c) Jour 10



(d) Jour 100



(e) Jour 10 ROMS



(f) Jour 100 ROMS

FIG. 6.13 – Champ de température de la couche de surface du cas test vortex barocline pour les jours simulés 10 et 100, pour le schéma standard de MARS (a et b), pour le nouveau schéma (c et d) et pour ROMS (e et f).

Chapitre 7

Etude du schéma temporel 3D

Sommaire

7.1 Vue d'ensemble du schéma temporel 2D-3D 122

7.2 Coriolis 124

7.3 Couplage vitesses - traceurs 124

Nous étudions ici les impacts des modifications du schéma temporel 2D et du couplage sur le comportement du schéma temporel 3D. Nous nous intéressons essentiellement à la discrétisation temporelle de la force de Coriolis ainsi que du couplage entre vitesse et traceurs pour la propagation des ondes internes.

7.1 Vue d'ensemble du schéma temporel 2D-3D

Nous réécrivons tout d'abord le nouveau schéma 2D présenté précédemment :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \bar{u}^{n+\frac{1}{2},*} & = & \bar{u}^n - \frac{1}{2}\Delta t \left(g\frac{\partial \zeta^n}{\partial x} + f\,\bar{v}^n + \bar{u}^n \frac{\partial \bar{u}^n}{\partial x} + \bar{v}^n \frac{\partial \bar{u}^n}{\partial y} \right) \\ \bar{v}^{n+\frac{1}{2},*} & = & \bar{v}^n - \frac{1}{2}\Delta t \left(g\frac{\partial \zeta^n}{\partial y} - f\,\bar{u}^n + \bar{u}^n \frac{\partial \bar{v}^n}{\partial x} + \bar{v}^n \frac{\partial \bar{v}^n}{\partial y} \right) \end{array} \right. \tag{7.1}$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \zeta^{n+\frac{1}{2},*} & = & \zeta^n - \frac{1}{2}\Delta t \left(\frac{\partial h^n \bar{u}^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x} + \frac{\partial h^n \bar{v}^{n+\frac{1}{2},*}}{\partial y} \right) \\ \bar{u}^{n+\frac{1}{2}} & = & \bar{u}^n - \frac{1}{2}\Delta t \left(g\frac{\partial \zeta^{n+\frac{1}{2},*}}{\partial x} + f\,\bar{v}^{n+\frac{1}{2},*} + \bar{u}^{n+\frac{1}{2},*} \frac{\partial \bar{u}^{n+\frac{1}{2},*}}{\partial x} + \bar{v}^{n+\frac{1}{2},*} \frac{\partial \bar{u}^{n+\frac{1}{2},*}}{\partial y} \right) \end{array} \right. \tag{7.2}$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \zeta^{n+\frac{1}{2}} & = & \zeta^n - \frac{1}{2}\Delta t \left(\frac{\partial h^{n+\frac{1}{2},*} \bar{u}^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x} + \frac{\partial h^{n+\frac{1}{2},*} \bar{v}^{n+\frac{1}{2}}}{\partial y} \right) \\ \bar{v}^{n+\frac{1}{2}} & = & \bar{v}^n - \frac{1}{2}\Delta t \left(g\frac{\partial \zeta^{n+\frac{1}{2}}}{\partial y} - f\,\bar{u}^{n+\frac{1}{2}} + \bar{u}^{n+\frac{1}{2}} \frac{\partial \bar{v}^{n+\frac{1}{2},*}}{\partial x} + \bar{v}^{n+\frac{1}{2},*} \frac{\partial \bar{v}^{n+\frac{1}{2},*}}{\partial y} \right) \end{array} \right. \tag{7.3}$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \bar{u}^{n+1,*} & = & \bar{u}^{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\Delta t \left(g\frac{\partial \zeta^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x} + f\,\bar{v}^{n+\frac{1}{2}} + \bar{u}^{n+\frac{1}{2}} \frac{\partial \bar{u}^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x} + \bar{v}^{n+\frac{1}{2}} \frac{\partial \bar{u}^{n+\frac{1}{2}}}{\partial y} \right) \\ \bar{v}^{n+1,*} & = & \bar{v}^{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\Delta t \left(g\frac{\partial \zeta^{n+\frac{1}{2}}}{\partial y} - f\,\bar{u}^{n+\frac{1}{2}} + \bar{u}^{n+\frac{1}{2}} \frac{\partial \bar{v}^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x} + \bar{v}^{n+\frac{1}{2}} \frac{\partial \bar{v}^{n+\frac{1}{2}}}{\partial y} \right) \end{array} \right. \tag{7.4}$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \zeta^{n+1,*} & = & \zeta^{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\Delta t \left(\frac{\partial h^{n+\frac{1}{2}} \bar{u}^{n+1,*}}{\partial x} + \frac{\partial h^{n+\frac{1}{2}} \bar{v}^{n+1}}{\partial y} \right) \\ \bar{v}^{n+1} & = & \bar{v}^{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\Delta t \left(g\frac{\partial \zeta^{n+1,*}}{\partial y} - f\,\bar{u}^{n+1,*} + \bar{u}^{n+1,*} \frac{\partial \bar{v}^{n+1,*}}{\partial x} + \bar{v}^{n+1,*} \frac{\partial \bar{v}^{n+1,*}}{\partial y} \right) \end{array} \right. \tag{7.5}$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \zeta^{n+1} & = & \zeta^{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\Delta t \left(\frac{\partial h^{n+1,*} \bar{u}^{n+1}}{\partial x} + \frac{\partial h^{n+1,*} \bar{v}^{n+1}}{\partial y} \right) \\ \bar{u}^{n+1} & = & \bar{u}^{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\Delta t \left(g\frac{\partial \zeta^{n+1}}{\partial x} + f\,\bar{v}^{n+1} + \bar{u}^{n+1,*} \frac{\partial \bar{u}^{n+1,*}}{\partial x} + \bar{v}^{n+1} \frac{\partial \bar{u}^{n+1,*}}{\partial y} \right) \end{array} \right. \tag{7.6}$$

Le schéma a été ici écrit avec un coefficient α égal à 0. En pratique, c'est la seule valeur de α qui permet un amortissement complet des hautes fréquences, comme c'est le cas dans une méthode de time splitting. Ceci procure plus de stabilité au système dans les configurations 3D.
Notons maintenant $G_u(u,v)$ (resp. $G_v(u,v)$) le second membre des termes 3D des équations de quantité de mouvement selon x (resp. y), construit à partir des champs de vitesses 3D u et v. $\bar{G}_u(u,v)$ représente l'intégrale sur la verticale de $G_u(u,v)$.

L'extension au 3D s'écrit quant à elle comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \bar{v}^{n+\frac{1}{2},*} & = & \bar{v}^n - \frac{1}{2}\Delta t \left(g\frac{\partial \zeta^n}{\partial y} + \bar{G}_v(u^{n-\frac{1}{2}}, v^{n-\frac{1}{2}}) \right) \end{array} \right. \tag{7.7}$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \zeta^{n+\frac{1}{2},*} & = & \zeta^n - \frac{1}{2}\Delta t \left(\frac{\partial h^n \bar{u}^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x} + \frac{\partial h^n \bar{v}^{n+\frac{1}{2},*}}{\partial y} \right) \\ \bar{u}^{n+\frac{1}{2}} & = & \bar{u}^n - \frac{1}{2}\Delta t \left(g\frac{\partial \zeta^{n+\frac{1}{2},*}}{\partial x} + \bar{G}_u(u^n, v^n) \right) \\ u^{n+\frac{1}{2}} & = & u^n - \frac{1}{2}\Delta t \left(g\frac{\partial \zeta^{n+\frac{1}{2},*}}{\partial x} + G_u(u^n, v^n) \right) \end{array} \right. \tag{7.8}$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \zeta^{n+\frac{1}{2}} & = & \zeta^n - \frac{1}{2}\Delta t \left(\frac{\partial h^{n+\frac{1}{2},*} \bar{u}^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x} + \frac{\partial h^{n+\frac{1}{2},*} \bar{v}^{n+\frac{1}{2}}}{\partial y} \right) \\ \bar{v}^{n+\frac{1}{2}} & = & \bar{v}^n - \frac{1}{2}\Delta t \left(g\frac{\partial \zeta^{n+\frac{1}{2}}}{\partial y} + \bar{G}_v(u^{n+\frac{1}{2}}, v^n) \right) \\ v^{n+\frac{1}{2}} & = & v^n - \frac{1}{2}\Delta t \left(g\frac{\partial \zeta^{n+\frac{1}{2}}}{\partial y} + G_v(u^{n+\frac{1}{2}}, v^n) \right) \end{array} \right. \tag{7.9}$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} h^{n+\frac{1}{2}} T^{n+\frac{1}{2}} & = & h^n T^n - \frac{1}{2}\Delta t \left(\frac{\partial h^{n+\frac{1}{2},*} u^{n+\frac{1}{2}} T^n}{\partial x} + \frac{\partial h^{n+\frac{1}{2},*} v^{n+\frac{1}{2}} T^n}{\partial y} + \frac{\partial h^{n+\frac{1}{2},*} w^{n+\frac{1}{2}} T^{n+\frac{1}{2}}}{\partial z} \right) \end{array} \right. \tag{7.10}$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \bar{u}^{n+1,*} & = & \bar{u}^{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\Delta t \left(g\frac{\partial \zeta^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x} + \bar{G}_u(u^n, v^n) \right) \end{array} \right. \tag{7.11}$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \zeta^{n+1,*} & = & \zeta^{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\Delta t \left(\frac{\partial h^{n+\frac{1}{2}} \bar{u}^{n+1,*}}{\partial x} + \frac{\partial h^{n+\frac{1}{2}} \bar{v}^{n+1}}{\partial y} \right) \\ \bar{v}^{n+1} & = & \bar{v}^{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\Delta t \left(g\frac{\partial \zeta^{n+1,*}}{\partial y} + \bar{G}_v(u^{n+\frac{1}{2}}, v^{n+\frac{1}{2}}) \right) \\ v^{n+1} & = & v^{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\Delta t \left(g\frac{\partial \zeta^{n+1,*}}{\partial y} + G_v(u^{n+\frac{1}{2}}, v^{n+\frac{1}{2}}) \right) \end{array} \right. \tag{7.12}$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \zeta^{n+1} & = & \zeta^{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\Delta t \left(\frac{\partial h^{n+1,*} \bar{u}^{n+1}}{\partial x} + \frac{\partial h^{n+1,*} \bar{v}^{n+1}}{\partial y} \right) \\ \bar{u}^{n+1} & = & \bar{u}^{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\Delta t \left(g\frac{\partial \zeta^{n+1}}{\partial x} + \bar{G}_u(u^{n+\frac{1}{2}}, v^{n+1}) \right) \\ u^{n+1} & = & u^{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\Delta t \left(g\frac{\partial \zeta^{n+1}}{\partial x} + G_u(u^{n+\frac{1}{2}}, v^{n+1}) \right). \end{array} \right. \tag{7.13}$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} h^{n+1} T^{n+1} & = & h^{n+\frac{1}{2}} T^{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\Delta t \left(\frac{\partial h^{n+1,*} u^{n+1} T^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x} + \frac{\partial h^{n+1,*} v^{n+1} T^{n+\frac{1}{2}}}{\partial y} + \frac{\partial h^{n+1,*} w^{n+1} T^{n+1}}{\partial z} \right) \end{array} \right. \tag{7.14}$$

Dans cette version 3D du schéma, les phases de prédiction pour $\bar{u}^{n+\frac{1}{2},*}$ et $\bar{v}^{n+1,*}$ sont omises. Ces phases servaient principalement à stabiliser les termes d'advection. Nous supposons ici que ces termes proviennent du 3D, à travers les termes $\bar{G}_u, \bar{G}_v$ et qu'ils ont été discrétisés soit avec un ajout de diffusion explicite sur la quantitié de mouvement soit à l'aide d'un schéma décentré (type Quick) introduisant de la diffusion implicite. Il y a désormais, à l'intérieur de chaque demi pas de temps, deux étapes de calcul du second membre 3D des équations de quantité de mouvement : G_u et G_v. Ceci permet d'avancer les vitesses 3D u et v en total accord avec leur correspondant 2D $\bar{u}$ et $\bar{v}$.
Les traceurs sont advectés avec les dernières vitesses connus, les vitesses verticales ($w^{n+\frac{1}{2}}$ et w^{n+1}) étant recalculées en partant de ces vitesses avant chaque advection de traceur.
Notons que pour les phases de prédiction (calcul de $v^{n+\frac{1}{2},*}$ et $u^{n+1,*}$), les intégrales sur la verticale $\bar{G}_u$ et $\bar{G}_v$ utilisés sont décalées dans le temps. Ceci ne semble pas poser de problèmes de stabilité. Il est cependant possible d'utiliser une phase d'extrapolation à la Adams BashForth pour supprimer ce décalage.

Enfin notons que dans cette version, les termes de Coriolis sont inclus dans G_u et G_v et donc traités au niveau du 3D. Leur traitement au niveau du 2D ne présente pas de difficultés, l'impact de ce choix pourra être étudié.

7.2 Coriolis

Les vitesses 3D sont désormais connues à tous les demi pas de temps, il n'y a théoriquement plus de décalage des vitesses u et v. Ceci est représenté sur la figure (7.1)

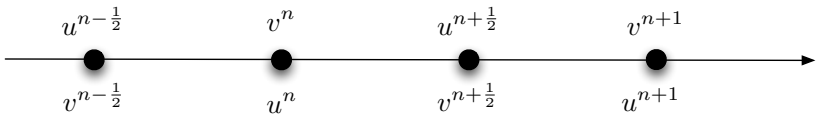


FIG. 7.1 – Position des vitesses u, v dans le nouveau schéma 3D

Le terme de Coriolis est traité temporellement comme suit :

$$\begin{aligned} u^{n+\frac{1}{2}} &= u^n + \tfrac{\Delta t}{2} f v^n \\ v^{n+\frac{1}{2}} &= v^n - \tfrac{\Delta t}{2} f u^{n+\frac{1}{2}} \\ v^{n+1} &= v^{n+\frac{1}{2}} - \tfrac{\Delta t}{2} f u^{n+\frac{1}{2}} \\ u^{n+1} &= u^{n+\frac{1}{2}} + \tfrac{\Delta t}{2} f v^{n+1} \end{aligned}$$

Le comportement du nouveau schéma vis à vis du terme de Coriolis est identique à celui de l'ancien schéma : schéma stable pour $f\Delta t \leq 2$, non dissipatif ($|\lambda^{\pm}| = 1$), accélération de la rotation par rapport à la rotation exacte :

$$\frac{\arg \lambda^{\pm}}{\pm f \Delta t} = 1 + \frac{(f\Delta t)^2}{24}$$

7.3 Couplage vitesses - traceurs

La modification du décalage en temps des vitesses traceurs conduit à des changements sur le comportement du schéma temporel vis à vis du couplage vitesses - traceurs. Dans le modèle, les traceurs sont calculés à tous les demi-pas de temps comme indiqué sur la figure (7.2)

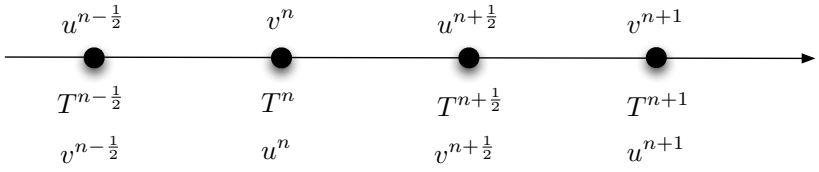


FIG. 7.2 – Décalage des vitesses u, v et traceurs T

Le couplage entre vitesses et traceurs est étudié après avoir adimensionalisé les variables de telle sorte que nous étudions finalement le système suivant :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial t} &= -\frac{\partial u}{\partial x} \end{aligned}$$

Le nouveau schéma en effectue la discrétisation temporelle suivante :

$$\begin{aligned} u^{n+\frac{1}{2}} &= u^n - \frac{\Delta t}{2}\frac{\partial T^n}{\partial x} \\ T^{n+\frac{1}{2}} &= T^n - \frac{\Delta t}{2}\frac{\partial u^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x} \\ u^{n+1} &= u^{n+\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t}{2}\frac{\partial T^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x} \\ T^{n+1} &= T^{n+\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t}{2}\frac{\partial u^{n+1}}{\partial x} \end{aligned}$$

Il s'agit donc de deux applications successives d'un schéma de type Forward-Backward. Les deux évaluations du champ de vitesses conduisent ici à des changements par rapport au schéma original de MARS. Le schéma est toujours non dissipatif mais la contrainte de stabilité sur la CFL passe de 2 à 4. La dispersion, toujours à l'ordre 2, a un coefficient 4 fois moindre que pour le schéma original.

$$\frac{\arg \lambda^{\pm}}{\pm k\Delta t} = 1 + \frac{(k\Delta t)^2}{96}$$

Chapitre 8

Schémas d'advection

Sommaire

8.1 Principes généraux sur les schémas d'advection 127
8.2 Schémas d'advection 1D 128
8.2.1 Propriétés numériques des schémas 129
8.2.2 Revue de schémas numériques 1D 129
8.2.3 Expériences numériques 131
8.3 Schémas d'advection 2D 134
8.3.1 Schémas multidimensionnels 134
8.3.2 Extension de schémas 1D 135
8.3.3 Approche LeVeque 136
8.3.4 UTOPIA 137
8.4 Cas tests 2D 137
8.4.1 Advection diagonale 137
8.4.2 Préservation des constantes 143
8.4.3 Déformation 145
8.4.4 Convergence 148
8.4.5 Coût de calcul 148
8.5 Cas tests 3D 149
8.5.1 Test dans MARS : Vortex Barocline 149
8.5.2 Tests en configurations réalistes 149
8.6 Conclusion 151

8.1 Principes généraux sur les schémas d'advection

Nous allons nous intéresser à la résolution numérique du transport d'un champ scalaire q par un champ de vitesse $\vec{u}$. Ce transport est décrit par une équation d'advection qui peut s'écrire de la manière suivante :

$$\partial_t q + \vec{u} \cdot \nabla q \;=\; 0 \; . \tag{8.1}$$

Pour un fluide incompressible, le champ de vitesse est à divergence nulle et l'équation (8.1) peut se réécrire sous la forme d'une équation de conservation :

$$\partial_t q + \nabla \cdot (\vec{u}\, q) \;=\; 0 \; . \tag{8.2}$$

Nous limiterons l'étude aux équations bidimensionnelles, l'extension des méthodes à trois dimensions se faisant sans difficulté particulière. Nous noterons donc $\vec{u} = (u, v)^T$ et supposerons que le champ de vitesse est à divergence nulle, c'est-à-dire tel que :

$$\nabla \cdot \vec{u} \;=\; \partial_x u + \partial_y v \;=\; 0 \; . \tag{8.3}$$

Bien que l'on souhaite résoudre l'équation (8.1), il est important de baser l'élaboration des schémas numé-

riques sur l'équation sous forme conservative (8.2) afin d'assurer la conservation du traceur q. Ainsi, nous allons considérer des schémas pouvant s'écrire de la manière suivante :

$$q_{i,j}^{n+1} \;=\; q_{i,j}^{n} - \tfrac{\Delta t}{\Delta x}\Big(F_{i+\frac{1}{2},j} - F_{i-\frac{1}{2},j}\Big) - \tfrac{\Delta t}{\Delta y}\Big(G_{i,j+\frac{1}{2}} - G_{i,j-\frac{1}{2}}\Big)\;, \tag{8.4}$$

où Δt est le pas de discrétisation en temps, Δx et Δy sont les pas de discrétisation en espace, F et G sont des flux aux interfaces de la cellule centrée au point $(x_i, y_j) = (i\Delta x, j\Delta y)$. Nous utiliserons une grille de type "C", comme représenté sur la figure 8.1.

Ainsi, la vitesse horizontale u est définie sur les points $(x_{i+\frac{1}{2}}, y_j)$ et la vitesse verticale sur les points $(x_i, y_{j+\frac{1}{2}})$. Le flux sur la face "est" de la cellule (i, j) peut alors s'écrire de manière générique :

$$F_{i+\frac{1}{2},j} \;=\; u_{i+\frac{1}{2},j}\,\widehat{q}_{i+\frac{1}{2},j} \tag{8.5}$$

où $\widehat{q}_{i+\frac{1}{2},j}$ est une évaluation de la variable transportée au point $(i+\frac{1}{2}, j)$. Dans la suite, nous noterons :

$$c_x = u_{i+\frac{1}{2},j}\,\tfrac{\Delta t}{\Delta x}\;\;,\quad c_y = v_{i,j+\frac{1}{2}}\,\tfrac{\Delta t}{\Delta y}\quad\text{et}\quad \text{CFL} = \max(|c_y|, |c_y|)\;. \tag{8.6}$$

Les nombres sans dimension c_x et c_y sont les nombres de Courant horizontaux et verticaux aux points maillage où sont définies les vitesses correspondantes, tandis que CFL est le nombre de Courant global.

Dans le cas particulier d'un champ de vitesse constant, l'équation (8.4) peut alors se réécrire :

$$q_{i,j}^{n+1} \;=\; q_{i,j}^{n} - c_x\big(\widehat{q}_{i+\frac{1}{2},j} - \widehat{q}_{i-\frac{1}{2},j}\big) - c_y\big(\widehat{q}_{i,j+\frac{1}{2}} - \widehat{q}_{i,j-\frac{1}{2}}\big)\;. \tag{8.7}$$

Dans la suite, nous nous attacherons à étudier des schémas numériques conservatifs qui préservent les champs scalaires constants. Par nature, un schéma construit à partir de la forme advective (8.1) des équations préserve les constantes, tandis qu'un schéma sous forme conservative (8.2) est conservatif.

8.2 Schémas d'advection 1D

Avant de s'intéresser aux schémas numériques pour la résolution de l'équation de transport bidimensionnelle, nous allons commencer par étudier les propriétés de quelques schémas d'advection conservatifs en dimension 1.

En supposant donc la vitesse verticale nulle ($v = 0$), le schéma (8.7) se réécrit :

$$q_{i,j}^{n+1} \;=\; q_{i,j}^{n} - c_x\big(\widehat{q}_{i+\frac{1}{2},j} - \widehat{q}_{i-\frac{1}{2},j}\big) \tag{8.8}$$

La discrétisation en temps est basée sur un schéma d'Euler explicite. La condition de divergence nulle en 1D équivaut à $\partial_x u = 0$, *i.e.* $u \equiv$ cst, mais nous garderons à l'esprit le cas plus général où u est variable en espace afin de pouvoir étendre les schémas en 2D plus simplement.

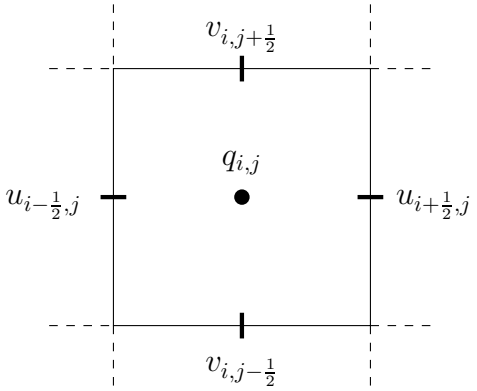


FIG. 8.1 – Grille de discrétisation

8.2.1 Propriétés numériques des schémas

Ordre Pour comparer l'erreur commise par chaque schéma numérique, supposerons que le vitesse u est constante en temps et en espace ($u(x,t) = u_0$) et nous calculerons l'erreur locale de troncature commise sur un pas de temps :

$$\text{err} \;=\; \frac{1}{\Delta t}\left(q_{i,j}^{n+1} - q(x_i, y_j, t^{n+1}) \right) \;=\; O\big(\Delta x^p,\, \Delta t^q\big) \tag{8.9}$$

où $q_{i,j}^{n+1}$ est la valeur calculée au temps $n+1$ par le schéma numérique (8.8), tandis que $q(x_i, y_j, t^{n+1})$ est la valeur exacte au temps $n+1$ du champ q^n transporté sur un pas de temps ; p et q sont des entiers qui désignent respectivement l'ordre en espace et en temps du schéma.

Comme les schémas numériques considérés sont soumis à une condition de stabilité ($\text{CFL} < 1$), les paramètres Δx et Δt sont liés par la relation $u_0 \Delta t = \text{CFL}\, \Delta x$ et nous pouvons définir un ordre *global* en temps et en espace. Nous pouvons écrire :

$$\text{err} \;=\; O\big(\Delta x^p\big) + O\big(\Delta t^q\big) + \sum_{m=1}^{r-1} O\big(\Delta x^{r-m} \Delta t^m\big) \;=\; O\big(\Delta x^r\big)$$

où $r = \min(p,q)$ est l'ordre global. Cette erreur de troncature dépend alors de la variable CFL.

Stabilité Pour analyser la stabilité des schéma d'advection, nous allons calculer le coefficient d'amplification, défini par :

$$A \;=\; \left| \frac{q_{i,j}^{n+1}}{q_{i,j}^{n}} \right| \;, \tag{8.10}$$

lorsque le schéma est appliqué à un mode de Fourier de nombre d'onde k. Le schéma numérique est stable, si A est inférieur à 1 pour tout k. En pratique, nous étudierons le développement limité de A en séries de $k\Delta x$.

8.2.2 Revue de schémas numériques 1D

Euler–Upwind Le schéma le plus simple consiste à utiliser pour $\widehat{q}_{i+\frac{1}{2},j}$ la valeur de q la plus proche selon le sens du transport :

$$\widehat{q}^{\,up}_{i+\frac{1}{2},j} \;=\; \begin{cases} q_{i,j} & \text{si } \; u > 0 \\ q_{i+1,j} & \text{si } \; u < 0 \end{cases} \tag{8.11}$$

Ce schéma décentré est appelé *upwind*, ou *donnor cell*. Dans le cas où $u(x,t) = u_0$, l'erreur commise est la suivante :

$$\text{err}^{\,up} \;=\; \tfrac{1}{2}\, \partial_x^2 q\, u_0 \big(\Delta x - u_0 \Delta t\big) \;+\; O\big(\Delta x^2\big) \;+\; O\big(\Delta t^2\big) \tag{8.12}$$

$$\;=\; \tfrac{1}{2}\, \partial_x^2 q\, (1 - \text{CFL})\, u_0\, \Delta x \;+\; O\big(\Delta x^2\big) \tag{8.13}$$

Il s'agit donc d'un schéma d'ordre 1 en temps et en espace que le terme d'erreur principal rend très diffusif. Concernant la stabilité, nous avons :

$$A^{\,up} \;=\; 1 \;-\; \tfrac{1}{2}\, \text{CFL}(1 - \text{CFL})\, k^2 \Delta x^2 \;+\; O\big(k^4 \Delta x^4\big) \;, \tag{8.14}$$

ce qui montre que le schéma est stable sous la condition $\text{CFL} \in [\,0, 1\,]$.

Résumé

> Le schéma Euler–Upwind est d'ordre 1 en temps et en espace, très diffusif et stable si $\text{CFL} \in [\,0, 1\,]$.

Euler–QUICK En 1979, Leonard a proposé (Leonard, 1979) le schéma QUICK reposant sur une interpolation quadratique de q au point $(i + \frac{1}{2}, j)$:

$$\widehat{q}^{\,qck}_{i+\frac{1}{2},j} \;=\; \begin{cases} \frac{1}{8}\,(3\, q_{i+1,j} + 6\, q_{i,j} - q_{i-1,j}) & \text{si } \; u > 0 \\ \frac{1}{8}\,(3\, q_{i,j} + 6\, q_{i+1,j} - q_{i+2,j}) & \text{si } \; u < 0 \end{cases} \tag{8.15}$$

Appliqué à l'équation d'advection (8.8), ce schéma produit l'erreur de troncature suivante :

$$\begin{aligned} \mathrm{err}^{\,qck} &= -\tfrac{1}{24}\,\partial_x^3 q\,u_0\,\Delta x^2 - \tfrac{1}{2}\,\partial_x^2 q\,u_0^2\,\Delta t \;+\; O\big(\Delta x^3\big) \;+\; O\big(\Delta t^2\big) && (8.16)\\ &= -\tfrac{1}{2}\,\partial_x^2 q\,\mathrm{CFL}\,u_0\,\Delta x \;+\; O\big(\Delta x^2\big) && (8.17)\end{aligned}$$

Il s'agit donc d'un schéma d'ordre 2 en espace et 1 en temps dont le terme d'erreur principal est antidiffusif. Concernant la stabilité, nous avons :

$$A^{\,qck} \;=\; 1 \;+\; \tfrac{1}{2}\,\mathrm{CFL}^2\,k^2\Delta x^2 \;+\; O\big(k^4\Delta x^4\big)\;. \qquad (8.18)$$

ce qui montre que le schéma est inconditionnellement instable.

Résumé

Le schéma Euler–QUICK est d'ordre 2 en espace et 1 en temps et il est inconditionnellement instable.

Euler–QUICKEST Dans le même papier (Leonard, 1979), Leonard introduit le schéma QUICKEST qui prend en compte une évaluation du nombre de courant dans le schéma d'interpolation :

$$\widehat{q}^{\,qst}_{i+\frac{1}{2},j} \;=\; \begin{cases} q_i \;\; + \tilde{\alpha}_1\,(q_{i+1,j} - q_{i,j}) + \tilde{\alpha}_2\,(q_{i,j} - q_{i-1,j}) & \text{si } \; u > 0 \\ q_{i+1} + \tilde{\alpha}_1\,(q_{i,j} - q_{i+1,j}) + \tilde{\alpha}_2\,(q_{i+2,j} - q_{i+1,j}) & \text{si } \; u < 0 \end{cases} \qquad (8.19)$$

avec $\tilde{\alpha}_1 = \frac{1}{6}(1-\mathrm{CFL})(2-\mathrm{CFL})$ et $\tilde{\alpha}_2 = \frac{1}{6}(1-\mathrm{CFL})(1+\mathrm{CFL})$. L'erreur de troncature peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \mathrm{err}^{\,qst} &= -\tfrac{1}{24}\,\partial_x^4 q\,u_0\,\big(2\Delta x^3 - u_0\Delta t\Delta x^2 - 2(u_0\Delta t)^2\Delta x + (u_0\Delta t)^3\big) \\ &\qquad + \; O\big(\Delta x^4\big) \;+\; O\big(\Delta x^2\Delta t^2\big) \;+\; O\big(\Delta t^4\big) && (8.20)\\ &= -\tfrac{1}{24}\,\partial_x^4 q\,\big(2 - \mathrm{CFL} - 2\,\mathrm{CFL}^2 + \mathrm{CFL}^3\big)\,u_0\,\Delta x^3 \;+\; O\big(\Delta x^4\big) && (8.21)\end{aligned}$$

Il s'agit donc d'un schéma d'ordre 3 en temps et en espace où le terme d'erreur principal correspond à un bilaplacien. Concernant la stabilité, nous avons :

$$A^{\,qst} \;=\; 1 \;-\; \tfrac{1}{24}\,\mathrm{CFL}(\mathrm{CFL}-1)(\mathrm{CFL}-2)(\mathrm{CFL}+1)\,k^4\Delta x^4 \;+\; O\big(k^6\Delta x^6\big)\;. \qquad (8.22)$$

Une analyse plus poussée peut montrer que les valeurs de CFL comprises dans les intervalles $]-\infty,-1]$ et $[2,+\infty[$, pour lesquels le terme en $O\big(k^4\Delta x^4\big)$ est négatif, rendent le schéma instable. En revanche, il est stable si $\mathrm{CFL} \in [0,1]$.

Résumé

Le schéma Euler–QUICKEST est d'ordre 3 en temps et en espace. L'erreur de troncature correspond à un terme de diffusion d'ordre 4. Il est stable si $\mathrm{CFL} \in [0,1]$.

Euler–Ultimate QUICKEST Contrairement au schéma Upwind, le schéma QUICKEST n'est pas monotone. Comme avec QUICK, mais dans une moindre mesure, des dépassements de signal (*undershoot*/*overshoot*) peuvent apparaître dans les zones de fort gradient. Dans (Leonard, 1991), Leonard utilise son limiteur universel (ULTIMATE (Leonard, 1988)) afin de rendre le schéma QUICKEST monotone. Nous avons présenté ce dernier sous la forme (8.19), mais il peut se réécrire de la manière suivante :

$$\widehat{q}^{\,qst}_{i+\frac{1}{2},j} \;=\; \begin{cases} q_i \;\; + (q_{i+1,j} - q_{i,j})\,\psi_{i+\frac{1}{2},j} & \text{si } \; u > 0 \\ q_{i+1} + (q_{i,j} - q_{i+1,j})\,\psi_{i+\frac{1}{2},j} & \text{si } \; u < 0 \end{cases} \qquad (8.23)$$

où $\psi_{i+\frac{1}{2},j} = \tilde{\alpha}_1 + \tilde{\alpha}_2\,\theta_{i+\frac{1}{2},j}$ et

$$\theta_{i+\frac{1}{2},j} \;=\; \begin{cases} \dfrac{q_{i,j} - q_{i-1,j}}{q_{i+1,j} - q_{i,j}} & \text{si } \; u > 0 \\[2ex] \dfrac{q_{i+1,j} - q_{i+2,j}}{q_{i,j} - q_{i+1,j}} & \text{si } \; u < 0 \end{cases} \qquad (8.24)$$

L'application du limiteur universel au schéma QUICKEST consiste à remplacer dans l'expression (8.23) la quantité $\psi_{i+\frac{1}{2},j}$ par une version limitée $\psi'_{i+\frac{1}{2},j}$ définie de la manière suivante :

$$\psi'_{i+\frac{1}{2},j} \;=\; \max\Big(\,0,\; \min\big(\,1,\; \psi_{i+\frac{1}{2},j},\; \tfrac{1-\mathrm{CFL}}{\mathrm{CFL}}\,\theta_{i+\frac{1}{2},j}\,\big)\,\Big) \qquad (8.25)$$

Et ainsi, nous avons :

$$\widehat{q}^{uqst}_{i+\frac{1}{2},j} = \begin{cases} q_i \quad + (q_{i+1,j} - q_{i,j})\,\psi'_{i+\frac{1}{2},j} & \text{si } u > 0 \\ q_{i+1} + (q_{i,j} - q_{i+1,j})\,\psi'_{i+\frac{1}{2},j} & \text{si } u < 0 \end{cases} \tag{8.26}$$

Ce schéma est non-linéaire et nous ne pouvons donc pas en faire l'analyse de la même manière que précédemment. Nous verrons cependant ses propriétés dans les cas-tests par la suite.

MARS Le schéma numérique d'advection actuellement mis en œuvre dans le code Mars (v.6.18) est une version limitée du schéma QUICK.

$$\widehat{q}^{mars}_{i+\frac{1}{2},j} = \begin{cases} \widehat{q}^{qck}_{i+\frac{1}{2},j} & \text{si } \frac{1}{q_{\max}} < \theta_{i+\frac{1}{2},j} < q_{\max} \\ \widehat{q}^{up}_{i+\frac{1}{2},j} & \text{sinon} \end{cases} \tag{8.27}$$

où $q_{\max}$ est choisi empiriquement. Nous pouvons noter que lorsque $q_{\max}$ augmente, le schéma tend vers Euler–QUICK (instable), tandis que lorsqu'il diminue, le schéma tend vers Euler–Upwind. Dans la suite, nous utiliserons la valeur $q_{\max} = 8$. Comme nous le verrons dans l'expérience, ce schéma n'est pas monotone.

8.2.3 Expériences numériques

Afin d'évaluer le comportement des différents schémas d'advection décrits dans la partie précédente, nous allons les appliquer à l'advection d'un profil sur un domaine 1D et effectuer une étude de convergence.

Advection d'un profil 1D Considérons un domaine 1D périodique, discrétisé sur 200 pas d'espace. Le profil advecté est composé de trois parties : un rectangle, suivi d'une demi-ellipse puis d'une gaussienne.

La figure 8.2 montre le résultat au bout de 5 tours pour un nombre de Courant CFL = 0.10. Le trait fin noir correspond au profil initial, tandis que le trait gras rouge correspond au résultat de l'advection à l'issue des 5 révolutions.

Nous remarquons que le schéma Upwind diffuse de manière considérable, si bien que le signal est presque totalement moyenné. Pour le schéma QUICK, dont nous avons montré qu'il est instable pour l'équation d'advection, un seul tour est effectué et déjà de fortes oscillations apparaissent. Le schéma QUICKEST est stable, mais n'étant pas monotone, il produit des oscillations de petite amplitude. L'utilisation du limiteur universel dans le schéma Ultimate QUICKEST permet de les supprimer totalement.

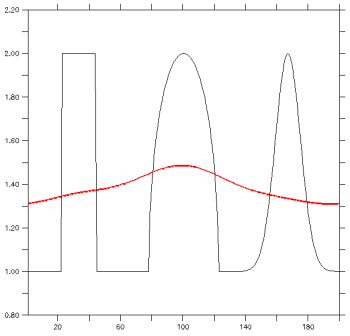
Par ailleurs, le schéma d'advection utilisé dans MARS est une version limitée du QUICK. Pour CFL = 0.10, l'utilisation du limiteur permet de stabiliser le schéma, mais on note cependant une tendance à aplanir les extrema et augmenter les pentes des profils de manière exagérée. Cela permet de transporter très correctement le profil rectangulaire mais conduit à transformer l'ellipse et la gaussienne en rectangles.

La figure 8.3 montre le même résultat pour un nombre de Courant CFL = 0.45. Le schéma QUICK est totalement instable. Par rapport au cas CFL = 0.10, le limiteur employé par le schéma de MARS ne parvient plus à contenir les oscillations et le schéma devient instable. Les schémas QUICKEST et Ultimate QUICKEST se comportent en revanche tout-à-fait correctement et ne semblent pas très sensibles à l'augmentation du nombre de Courant.

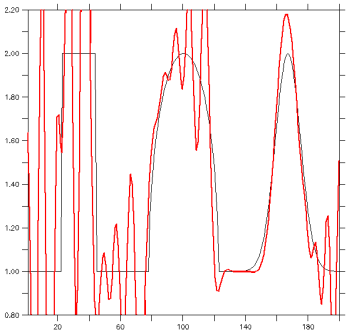
Convergence La figure 8.4 présente des courbes de convergence pour l'advection d'un profil rectangulaire (a) et d'un profil gaussien (b) avec les différents schémas numériques. L'erreur RMS est représentée en fonction du pas de discrétisation en espace, dans une échelle logarithmique. Le nombre de Courant est fixé à CFL = 0.25 et l'on réalise 8 tours de domaine. Le schéma QUICK n'est pas représenté car il est instable.

Nous avons dit précédemment que le schéma utilisé par MARS est très efficace pour le transport des profils rectangulaires. En effet, nous pouvons voir sur la figure 8.4 (a) que c'est lui qui produit la plus petite erreur dans ce cas précis (trait tireté). Les schémas QUICKEST et Ultimate QUICKEST (traits en pointillés) sont moins précis et le schéma Upwind (trait continu) s'avère être le moins bon.

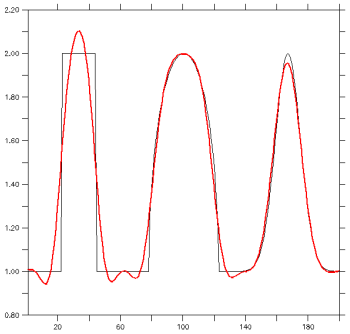
Pour un profil régulier, comme la gaussienne – figure 8.4 (b), nous retrouvons les résultats théoriques présentés dans la partie 8.2.2. Les schémas d'ordre 3 présentent le meilleur taux de convergence, devant le schéma de MARS et le schéma Upwind.



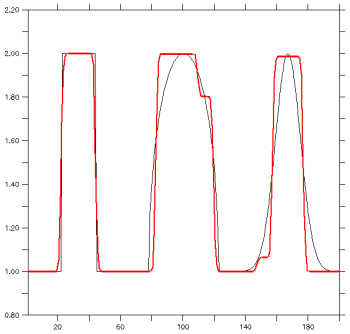
(a) Upwind



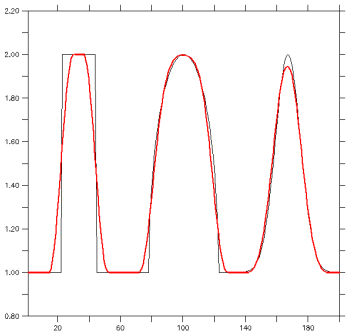
(b) QUICK (1 tour)



(c) QUICKEST

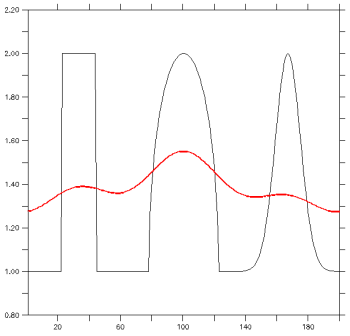


(d) MARS

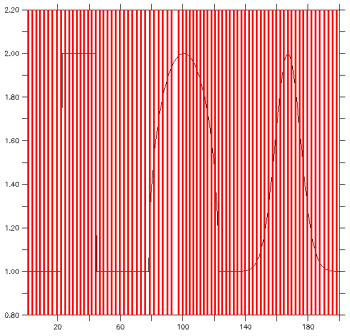


(e) Ultimate QUICKEST

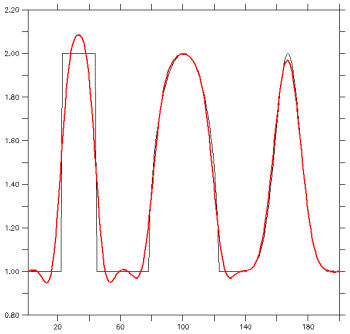
FIG. 8.2 – Advection d'un profil 1D à vitesse constante avec différents schémas numériques. 5 tours, CFL = 0.10



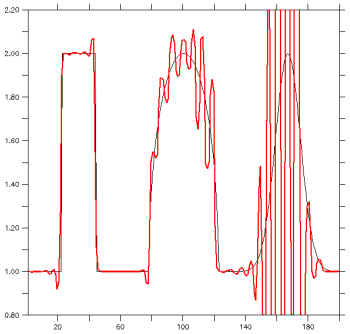
(a) Upwind



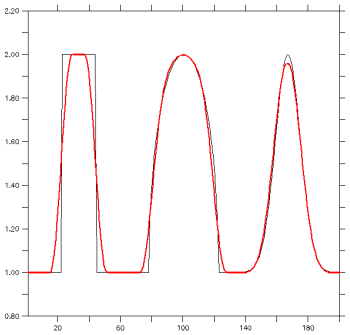
(b) QUICK (1 tour)



(c) QUICKEST

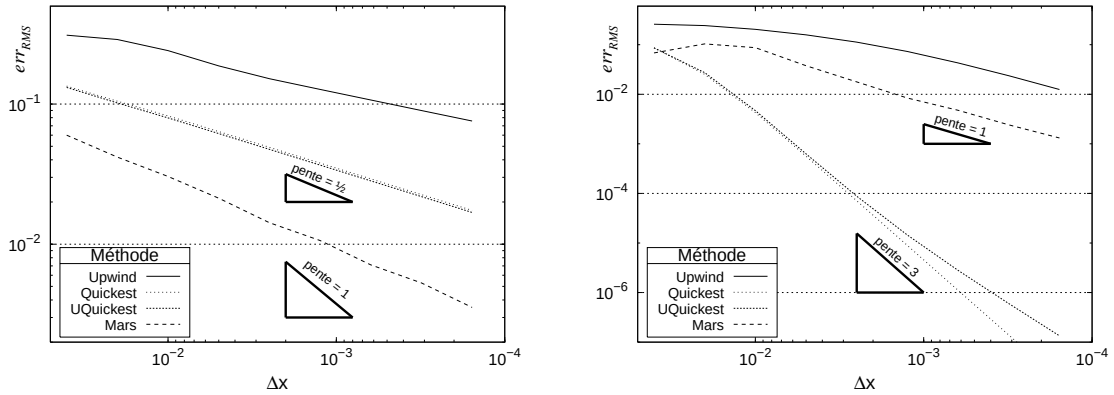


(d) MARS



(e) Ultimate QUICKEST

FIG. 8.3 – Advection d'un profil 1D à vitesse constante avec différents schémas numériques. 5 tours, CFL = 0.45



(a) Profil rectangulaire (b) Profil gaussien

FIG. 8.4 – Convergence de l'erreur en fonction de Δx pour les différents schémas numériques 1D. Échelle log–log, CFL = 0.25

8.3 Schémas d'advection 2D

Nous faisons dans cette partie une revue rapide des différents schémas numériques pour l'advection d'un traceur scalaire par un champ de vitesse bidimensionnel à divergence nulle. L'extension à trois dimensions se fait généralement sans difficulté particulière et ne sera pas abordée ici.

Après avoir montré l'intérêt d'une approche vraiment multidimensionnelle, nous présentons des méthodes pour étendre à deux dimensions les schémas numériques 1D introduits dans la partie précédente. Nous nous intéresserons ensuite à deux approches intrinsèquement bidimensionnelles dues à LeVeque (LeVeque, 1996) et à Leonard (UTOPIA (Leonard *et al.*, 1993)). Des cas-tests numériques seront présentés dans la partie suivante afin d'évaluer les qualités respectives des différentes approches.

Afin d'assurer la conservation des traceurs, les schémas numériques sont écrits sous forme flux (8.4). Dans la suite, nous noterons $F[q^n]$ et $G[q^n]$ les flux calculés respectivement dans les directions x et y par un schéma 1D à partir des valeurs de q^n.

8.3.1 Schémas multidimensionnels

Dans un premier temps, nous allons montrer sur un exemple qu'il est nécessaire d'utiliser une méthode conçue dès le départ en prenant en compte l'aspect multidimensionnel de l'équation de transport pour ne pas introduire des erreurs indésirables.

Pour construire un schéma d'advection bidimensionnel, la méthode la plus intuitive consiste à reprendre l'équation (8.4) en écrivant les flux de manière explicite, c'est-à-dire à calculer F et G avec un schéma 1D à partir des valeurs du traceur au temps n :

$$\begin{aligned} q_{i,j}^{n+1} &= q_{i,j}^{n} - \frac{\Delta t}{\Delta x}\Big(F_{i+\frac{1}{2},j}[q^n] - F_{i-\frac{1}{2},j}[q^n]\Big) \\ &\quad - \frac{\Delta t}{\Delta y}\Big(G_{i,j+\frac{1}{2}}[q^n] - G_{i,j-\frac{1}{2}}[q^n]\Big) \ . \end{aligned} \tag{8.28}$$

Il s'agit de la méthode actuellement employée dans le code MARS. Cependant, cette méthode ne prend pas en compte la contribution des dérivées croisées ; le schéma bidimensionnel résultant est intrinsèquement d'ordre global 1, quelque soit l'ordre du schéma 1D utilisé pour le calcul des flux.

Pour bien comprendre ceci, effectuons un développement en série de Taylor au temps t^n de la solution recherchée au temps t^{n+1} :

$$q_{i,j}^{n+1,e} = q_{i,j}^{n} + \Delta t\, \partial_t\, q_{i,j}^{n} + \tfrac{1}{2}\Delta t^2 \partial_t^2 q_{i,j}^{n} + O\big(\Delta t^3\big) \ , \tag{8.29}$$

puis transformons les dérivées en temps $\partial_t q$ et $\partial_t^2 q$ en dérivées spatiales à l'aide de la relation (8.2) pour obtenir :

$$\begin{aligned} q_{i,j}^{n+1,e} &= q_{i,j}^{n} - \Delta t\,\big(u\,\partial_x q + v\,\partial_y q\big) \\ &\quad + \tfrac{1}{2}\Delta t^2\big(u^2\partial_x^2 q + 2uv\,\partial_{x,y}^2 q + v^2\partial_y^2 q\big) + O\big(\Delta t^3\big) \end{aligned} \tag{8.30}$$

Nous observons notamment que le terme en $O(\Delta t^2)$ dépend de $\partial^2_{x,y} q$.

L'utilisation d'un schéma numérique pour calculer q^{n+1} de manière approchée produit des erreurs dites de troncature. Par exemple, si l'on utilise le schéma Euler–QUICKEST pour calculer les flux directement dans la méthode (8.28), nous pouvons écrire en réinjectant (8.19) dans l'équation (8.7) :

$$\begin{aligned} q_{i,j}^{n+1,\,qst} &= q_{i,j}^n - \Delta t \left(u \left(\partial_x q + \tfrac{\Delta x^3}{12} \partial_x^4 q \right) + v \left(\partial_y q + \tfrac{\Delta y^3}{12} \partial_y^4 q \right) \right) \\ &\quad + \tfrac{1}{2} \Delta t^2 \Big(u^2 \big(\partial_x^2 q + \tfrac{\Delta x^2}{12} \partial_x^4 q \big) + v^2 \big(\partial_y^2 q + \tfrac{\Delta y^2}{12} \partial_y^4 q \big) \Big) \\ &\quad + O\big(\Delta t \Delta x^4, \Delta t \Delta y^4\big) + O\big(\Delta t^2 \Delta x^4, \Delta t^2 \Delta y^4\big) + O\big(\Delta t^3\big) \end{aligned}$$

Nous observons que le terme en $\partial^2_{x,y} q$ n'est pas présent. Plus précisément, nous pouvons écrire l'erreur commise par le schéma numérique en fonction de Δx et Δy seulement, en réintroduisant les nombres de Courant locaux définis en (8.6). Nous avons :

$$\begin{aligned} err^{qst} &= \tfrac{1}{\Delta t} \left(q_{i,j}^{n+1,\,qst} - q_{i,j}^{n+1,e} \right) \\ &= -\, uv \Delta t\, \partial^2_{x,y} q \;+\; O\big(\Delta x^3, \Delta y^3\big) \;+\; O\big(\Delta t^2\big) \end{aligned}$$

Le terme d'erreur principal est lié aux dérivées croisées. Les erreurs résiduelles du schéma Euler–QUICKEST en $O(\Delta x^3)$ et $O(\Delta y^3)$ sont également dominées par des erreurs d'ordre 2 issues des dérivées croisées de degré supérieur dans le terme en $O(\Delta t^2)$. Ceci est lié au fait que l'on utilise une discrétisation en temps de type Euler. Nous n'aurions pas ce problème avec un schéma temporel d'ordre élevé.

Pour résumer, on peut dire que même en utilisant un schéma numérique d'ordre relativement élevé (ordre 3 pour le schéma QUICKEST) pour le calcul des flux, l'approche naïve (8.28) ne produit des schémas multidimensionnels que d'ordre 1 au plus. Il convient alors de trouver une méthode permettant de traiter convenablement ces dérivées croisées.

Par ailleurs, l'ajout des termes croisés permet également de conserver la condition de stabilité $\text{CFL} < 1$, au lieu de $\text{CFL} < \frac{1}{\sqrt{2}}$. Voir sur ce point une analyse détaillée dans (LeVeque, 1996).

8.3.2 Extension de schémas 1D

Nous commençons par présenter des méthodes d'extension à deux dimensions de schémas 1D par splitting, comme le schéma (8.28), mais modélisant les termes de dérivées croisées. Les flux F et G sont calculés à l'aide des schémas numériques 1D introduits dans la partie 8.2.

Ajout du terme diagonal

Un première solution consiste à coder explicitement le terme d'ordre 2 contenant les dérivées croisées. On peut l'écrire de la manière suivante :

$$\begin{aligned} q_{i,j}^{n+1} &= q_{i,j}^n - \tfrac{\Delta t}{\Delta x} \Big(F_{i+\frac{1}{2},j}[q^n] - F_{i-\frac{1}{2},j}[q^n] \\ &\qquad - \tfrac{1}{2} \tfrac{\Delta t}{\Delta y} \left(\big[v \partial_x (uq)\big]_{i,j+\frac{1}{2}} - \big[v \partial_x (uq)\big]_{i,j-\frac{1}{2}} \right) \Big) \\ &\quad - \tfrac{\Delta t}{\Delta y} \Big(G_{i,j+\frac{1}{2}}[q^n] - G_{i,j-\frac{1}{2}}[q^n] \\ &\qquad - \tfrac{1}{2} \tfrac{\Delta t}{\Delta x} \left(\big[u \partial_y (vq)\big]_{i+\frac{1}{2},j} - \big[u \partial_y (vq)\big]_{i-\frac{1}{2},j} \right) \Big) . \end{aligned} \tag{8.31}$$

Traiter de la même manière les termes de dérivées croisées d'ordre supérieur introduirait des expressions beaucoup plus compliquées à coder ainsi qu'une surcharge de calcul non-négligeable.

Splitting simple

Une autre façon de prendre en compte les termes croisés consiste à employer une méthode de splitting. Les flux en y sont calculés à partir de la valeur de q advectée d'un pas de temps dans la direction x :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} q_{i,j}^X &= q_{i,j}^n - \tfrac{\Delta t}{\Delta x} \left(F_{i+\frac{1}{2},j}[q^n] - F_{i-\frac{1}{2},j}[q^n] \right) \\ q_{i,j}^{n+1} &= q_{i,j}^n - \tfrac{\Delta t}{\Delta y} \left(G_{i,j+\frac{1}{2}}[q^X] - G_{i,j-\frac{1}{2}}[q^X] \right) \end{array} \right. \tag{8.32}$$

Bien sûr, il est possible de faire l'inverse :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} q^Y_{i,j} & = & q^n_{i,j} - \frac{\Delta t}{\Delta y}\left(G_{i,j+\frac{1}{2}}[q^n] - G_{i,j-\frac{1}{2}}[q^n] \right) \\ q^{n+1}_{i,j} & = & q^n_{i,j} - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(F_{i+\frac{1}{2},j}[q^Y] - F_{i-\frac{1}{2},j}[q^Y] \right) \end{array} \right. \tag{8.33}$$

et même d'alterner les deux combinaisons à chaque pas de temps pour éviter l'introduction d'un biais.

Le problème de cette approche est qu'elle ne préserve pas les constantes. Normalement, un champ scalaire initialement constant doit rester constant après être transporté par un champ de vitesse à divergence nulle ($\partial_x u + \partial_y v = 0$). Avec la méthode de splitting simple, cette propriété n'est vérifiée numériquement que sous la condition plus restreinte $\partial_x u = \partial_y v = 0$. Nous en verrons les conséquences dans les cas-tests numériques.

MACHO

Leonard propose (Leonard *et al.*, 1996) d'améliorer la méthode de splitting afin de préserver les champs constants. Il en résulte la méthode MACHO. Elle consiste à utiliser un schéma sous forme advective pour calculer une prédiction q^{AX} du champ transporté dans la direction x. Cette première étape n'est pas conservative mais sert juste à calculer les flux G :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} q^{AX}_{i,j} & = & q^n_{i,j} - \frac{\Delta t}{\Delta x}\, u^a_{i,j}\left(\widehat{q}^n_{i+\frac{1}{2},j} - \widehat{q}^n_{i-\frac{1}{2},j} \right) \\ q^{n+1}_{i,j} & = & q^n_{i,j} - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(F_{i+\frac{1}{2},j}[q^n] - F_{i-\frac{1}{2},j}[q^n] \right) \\ & & \quad - \frac{\Delta t}{\Delta y}\left(G_{i,j+\frac{1}{2}}[q^{AX}] - G_{i,j-\frac{1}{2}}[q^{AX}] \right) \end{array} \right. \tag{8.34}$$

La vitesse $u^a_{i,j}$ correspond à une vitesse moyenne sur la cellule. Bien sûr, il est possible de faire l'inverse :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} q^{AY}_{i,j} & = & q^n_{i,j} - \frac{\Delta t}{\Delta y}\, v^a_{i,j}\left(\widehat{q}^n_{i,j+\frac{1}{2}} - \widehat{q}^n_{i,j-\frac{1}{2}} \right) \\ q^{n+1}_{i,j} & = & q^n_{i,j} - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(F_{i+\frac{1}{2},j}[q^{AY}] - F_{i-\frac{1}{2},j}[q^{AY}] \right) \\ & & \quad - \frac{\Delta t}{\Delta y}\left(G_{i,j+\frac{1}{2}}[q^n] - G_{i,j-\frac{1}{2}}[q^n] \right) \end{array} \right. \tag{8.35}$$

et même d'alterner les deux méthodes à chaque pas de temps. Cette alternance est même conseiller par Leonard dans son article (Leonard *et al.*, 1996). Il montre dans ce dernier une expérience d'advection d'un profil gaussien de traceur dans une rotation solide. Les résultats sans l'alternance montrent que la tache de traceur oscille entre la forme initiale et une forme aplatie. L'utilisation de l'alternance fait disparaître cette déformation. Par la suite, nous implémenterons la méthode MACHO en faisant intervenir cette alternance.

8.3.3 Approche LeVeque

La méthode proposée par LeVeque et décrite en détails dans (LeVeque, 1996) consiste à corriger les flux F et G de manière incrémentale à partir du schéma Upwind pour prendre en compte la contribution des dérivées croisées d'ordre 1 (méthode M2), des termes d'ordre 2 (méthodes M3 et M4) et des termes d'ordre 3 (méthodes M5 et M6) en prenant bien en compte les dérivées croisées.

Elle s'écrit sous la forme (8.28) où $F_{i+\frac{1}{2},j}$ se décompose comme le produit de u et $\widehat{q}$, comme écrit en (8.5). Cependant, contrairement aux méthodes présentées dans le paragraphe précédent, le calcul de $\widehat{q}$ n'est pas issu d'un schéma 1D mais contient directement les contributions des dérivées croisées.

Ainsi, pour la méthode M2 par exemple, en supposant pour simplifier l'écriture que $u > 0$ et $v > 0$, nous avons :

$$\begin{array}{rcl} \widehat{q}_{i+\frac{1}{2},j} & = & q_{i,j} - \frac{1}{2}\frac{\Delta t}{\Delta y} u_{i+\frac{1}{2},j} \tilde{v}_{i+\frac{1}{2},j}(q_{i,j} - q_{i,j-1}) \\ \widehat{q}_{i,j+\frac{1}{2}} & = & q_{i,j} - \frac{1}{2}\frac{\Delta t}{\Delta x} \tilde{u}_{i,j+\frac{1}{2}} v_{i,j+\frac{1}{2}}(q_{i,j} - q_{i-1,j}) \end{array} \tag{8.36}$$

où $\tilde{v}_{i+\frac{1}{2},j}$ et $\tilde{u}_{i,j+\frac{1}{2}}$ sont des approximations de v et u aux points de grille $(i+\frac{1}{2}, j)$ et $(i, j+\frac{1}{2})$. Dans son papier, LeVeque suppose que les vitesses u et v sont toutes les deux connues aux milieu de chaque face (grille Arakawa de type "E") et donc ces valeurs sont connues. Mais comme nous travaillons avec une grille de type "C" (voir figure 8.1), nous devons procéder à des interpolations pour la mise en œuvre de cette méthode.

8.3.4 UTOPIA

Le schéma UTOPIA a été proposé par Leonard *et al.* (Leonard *et al.*, 1993). De la même manière que dans la méthode de LeVeque, il repose sur la construction de flux prenant directement en compte l'aspect multidimensionnel du problème de transport.

Il a été présenté pour des vitesses u et v localement constantes en espace. Dans la suite, nous noterons donc les nombres de Courant $c_x = \frac{u\Delta t}{\Delta x}$ et $c_y = \frac{v\Delta t}{\Delta y}$. Pour le calcul de $\widehat{q}$ au point $(i+\frac{1}{2}, j)$, nous avons, en supposant $c_x > 0$ et $c_y > 0$:

$$\begin{aligned} \widehat{q}_{i+\frac{1}{2},j} &= q_{i,j} + \tfrac{1}{2}(1-c_x)(q_{i+1,j}-q_{i,j}) - \tfrac{1}{6}(1-c_x^2)(q_{i+1,j}-2q_{i,j}+q_{i-1,j}) \\ &\quad - \tfrac{1}{2}c_y(q_{i,j}-q_{i,j-1}) - \tfrac{1}{4}c_y(1-c_y)(q_{i,j+1}-2q_{i,j}+q_{i,j-1}) \\ &\quad + \tfrac{1}{4}c_y(1-c_x)(q_{i+1,j}-q_{i,j}-q_{i+1,j-1}+q_{i,j-1}) \end{aligned} \tag{8.37}$$

La première ligne correspond au schéma QUICKEST dans la direction x. Les deux suivantes apportent la contribution des dérivées croisées. Pour un champ de vitesse constant, le schéma UTOPIA est équivalent à la méthode M5 de LeVeque (LeVeque, 1996).

8.4 Cas tests 2D

8.4.1 Advection diagonale

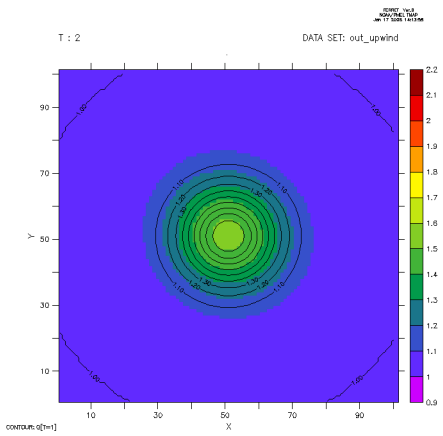
Dans ce premier cas-test, une tache de forme gaussienne, centrée sur un domaine carré, périodique, est advectée dans la diagonale du domaine par un champ de vitesse constant $(u, v) = (1, 1)$. La figure 8.5 montre le résultat au bout d'un tour en utilisant la méthode naïve (8.28) pour différents schémas de calcul des flux 1D. Le nombre de Courant est fixé à 0.1. Le profil initial de la tache est rappelé sur chaque figure par les contours en ligne noire. On remarque que le schéma Upwind diffuse de manière importante et l'amplitude de la tache est fortement diminuée. Le schéma QUICK, et dans une bien moindre mesure le schéma QUICKEST, produisent des dépassements. Le schéma codé dans Mars 8.5 (d) a tendance à transformer le profil initial gaussien en carré. Par ailleurs, un sous-dépassement est visible malgré la présence d'un limiteur. Le schéma Ultimate QUICKEST produit le meilleur résultat.

La figure 8.6 montre le même test effectué pour un nombre de Courant égal à 0.4. Le premier constat que l'on peut faire est que la plupart des schémas sont instables avec la méthode naïve (8.28) d'extension 2D. Les schémas QUICK et celui de Mars explosent rapidement, Ultimate QUICKEST puis QUICKEST un peu plus tard. Seul le schéma Upwind reste stable au bout d'un tour. On peut également constater pour ce dernier un étirement du profil initial dans la direction perpendiculaire à celle d'advection. Ce phénomène était également présent dans le cas $CFL = 0.1$ pour tous les schémas, mais moins visible. Il est lié au fait que la méthode naïve ne prend pas en compte le terme diagonal comportant les dérivées croisées.

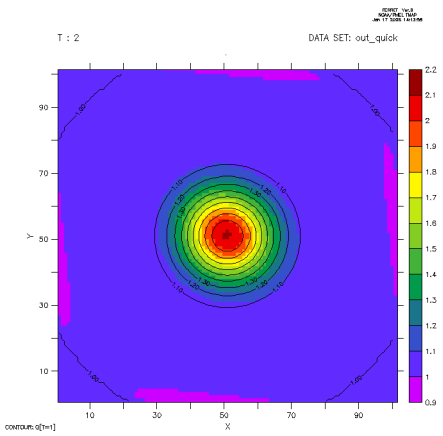
Sur la figure 8.7 sont représentés les résultats du même cas-test, toujours avec $CFL = 0.4$, mais en ajoutant cette fois un terme modélisant ces dérivées croisées. Il s'agit de la méthode (8.31). On montre sur cette figure également le résultat produit par le schéma UTOPIA (Leonard, 1988). On observe que l'ajout du terme diagonal permet de stabiliser les schémas QUICKEST et Ultimate QUICKEST, mais pas QUICK et Mars. Par ailleurs, l'étirement observé avec la méthode naïve a disparu. La méthode UTOPIA, quant à elle, donne un résultat très satisfaisant.

Une autre façon de prendre en compte les dérivées croisées consiste à utiliser une méthode de splitting. La figure 8.8 montre le résultat de la méthode (8.32) de splitting simple, toujours pour $CFL = 0.4$. La méthode MACHO donne les mêmes résultats car le champ de vitesse est constant en espace. Nous observons que les schéma Upwind, QUICKEST et Ultimate QUICKEST sont toujours stables et un peu moins diffusifs qu'avec l'ajout du terme diagonal. Le schéma QUICK et celui de Mars n'explosent plus, mais le premier produit des dépassements de signal importants tandis que le second déforme considérablement le profil initial gaussien pour le transformer en carré.

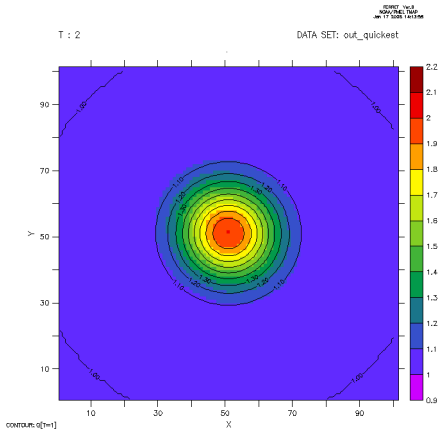
La figure 8.9 présente les résultats de la méthode de splitting simple, mais cette fois pour un nombre de Courant égal à 0.9. Le schéma QUICK et celui de Mars deviennent rapidement instables tandis que la solution produite par les trois autres ne semble pas dégradée par rapport à $CFL = 0.4$.



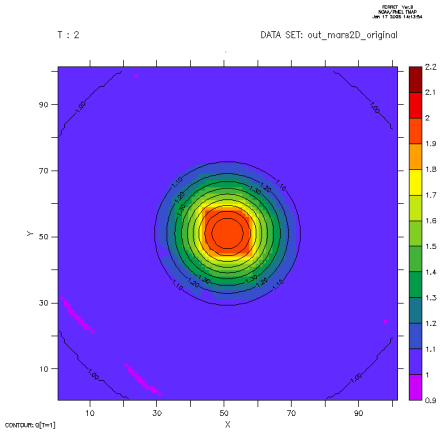
(a) Upwind



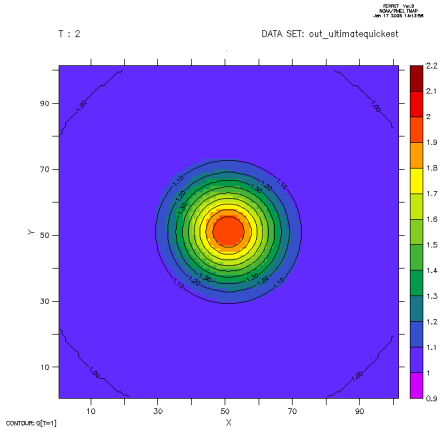
(b) QUICK



(c) QUICKEST

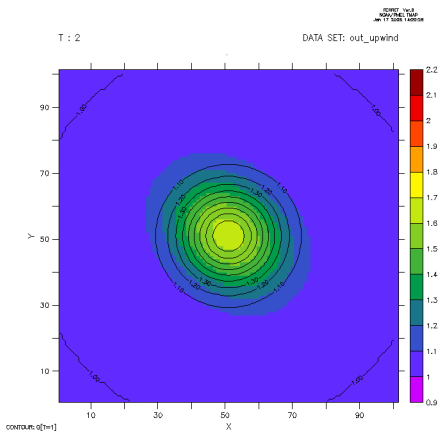


(d) Mars

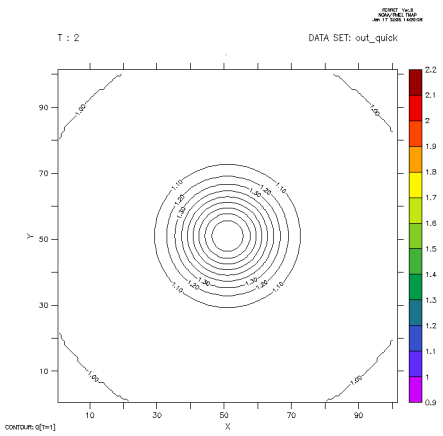


(e) Ultimate QUICKEST

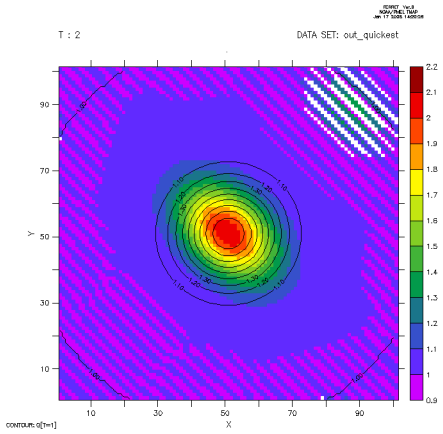
FIG. 8.5 – Cas-test 1 : advection diagonale d'une tache gaussienne avec la méthode naïve (8.28). $CFL = 0.1$.



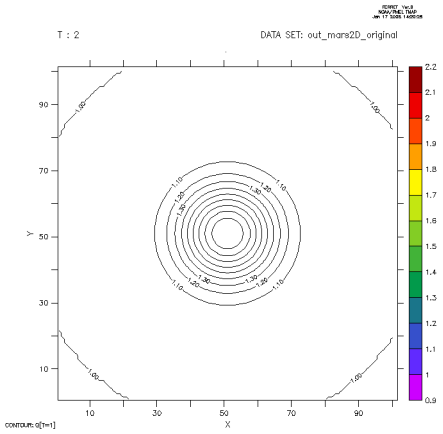
(a) Upwind



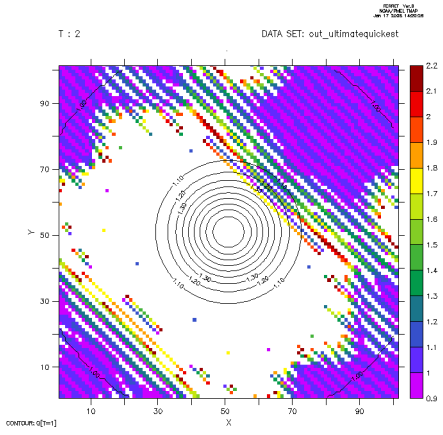
(b) QUICK



(c) QUICKEST

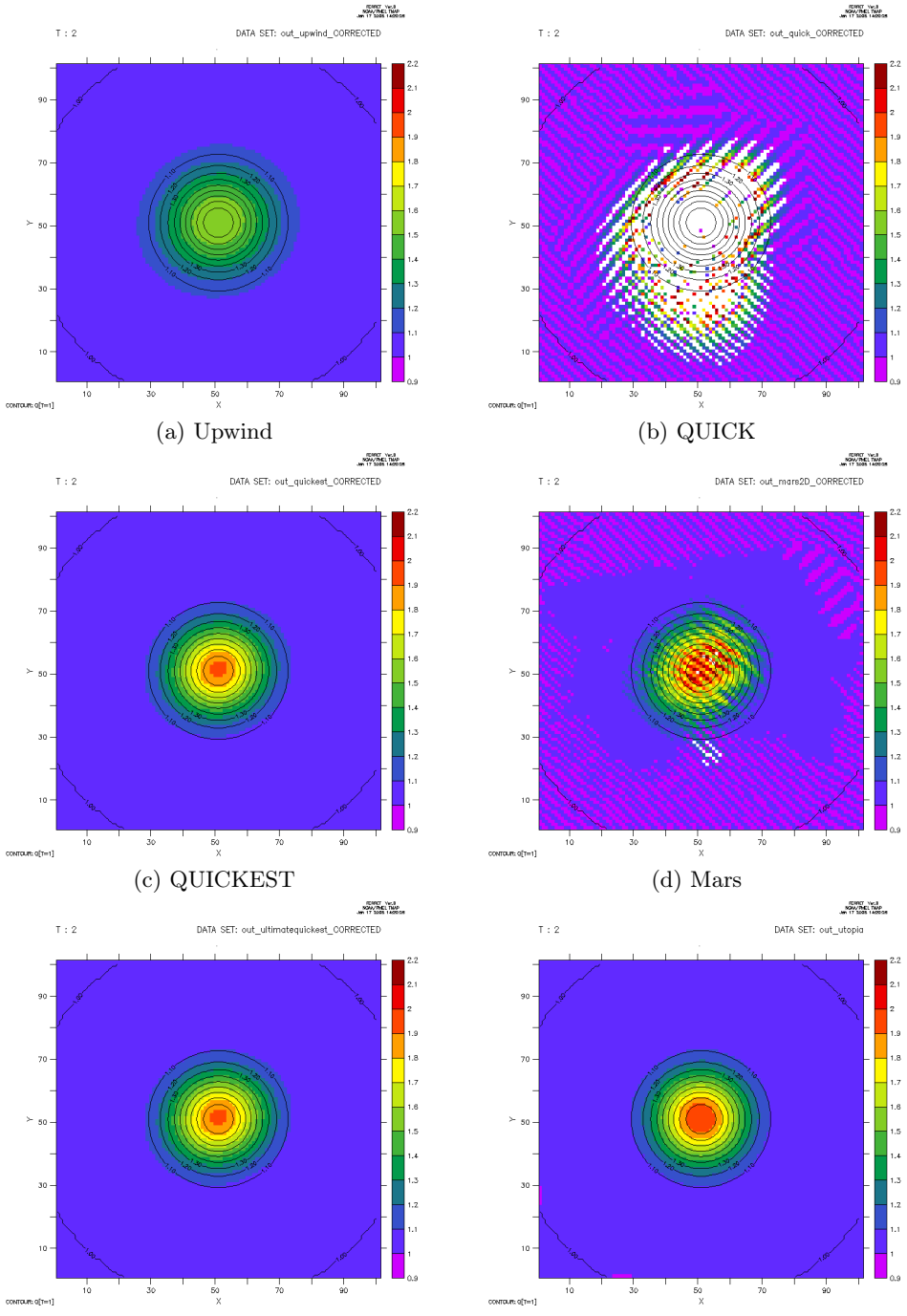


(d) Mars



(e) Ultimate QUICKEST

FIG. 8.6 – Cas-test 1 : advection diagonale d'une tache gaussienne avec la méthode naïve (8.28). $CFL = 0.4$.

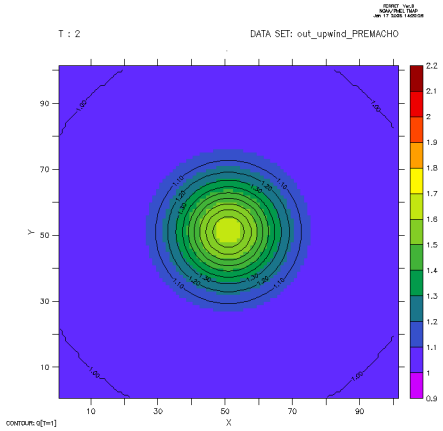


(a) Upwind (b) QUICK

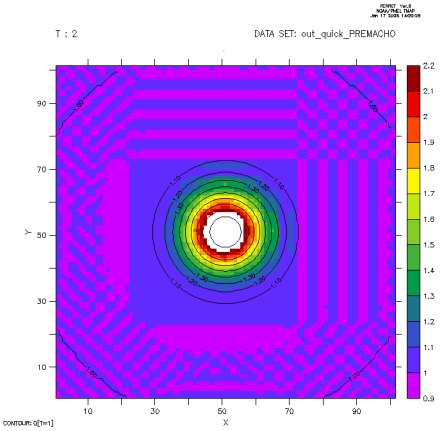
(c) QUICKEST (d) Mars

(e) Ultimate QUICKEST (f) UTOPIA

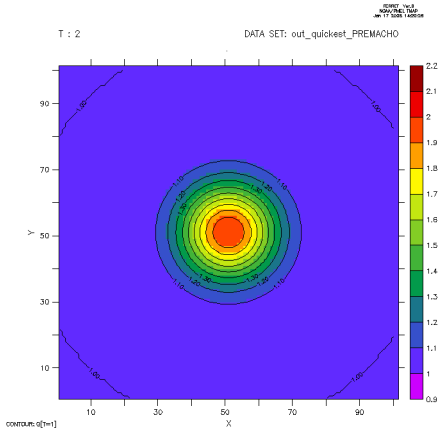
FIG. 8.7 – Cas-test 1 : advection diagonale d'une tache gaussienne avec ajout du terme diagonal (8.31). $CFL = 0.4$.



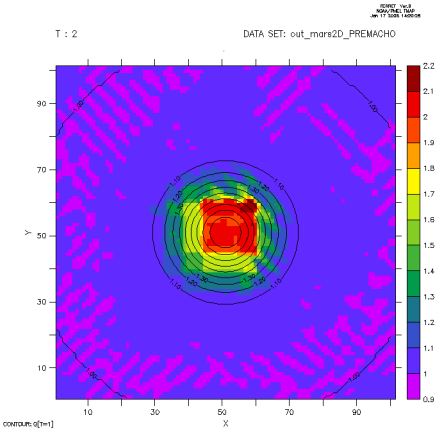
(a) Upwind



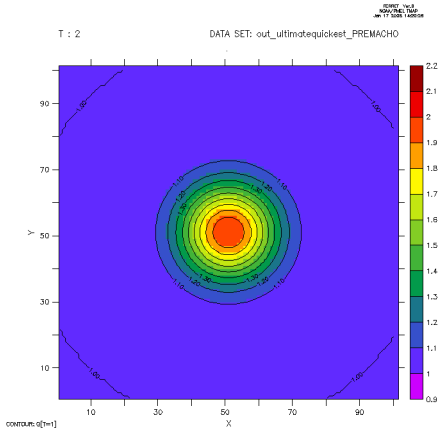
(b) QUICK



(c) QUICKEST

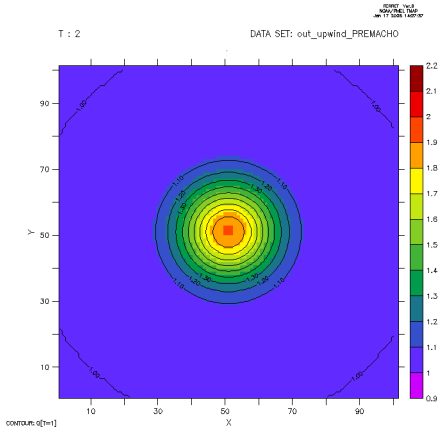


(d) Mars

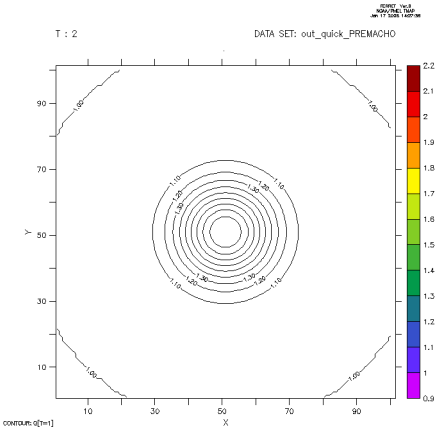


(e) Ultimate QUICKEST

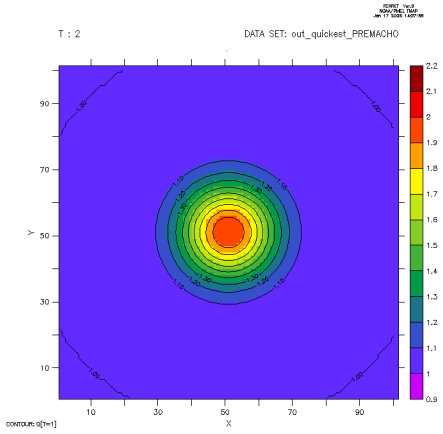
FIG. 8.8 – Cas-test 1 : advection diagonale d'une tache gaussienne avec la méthode de splitting simple (8.32–8.33). $CFL = 0.4$.



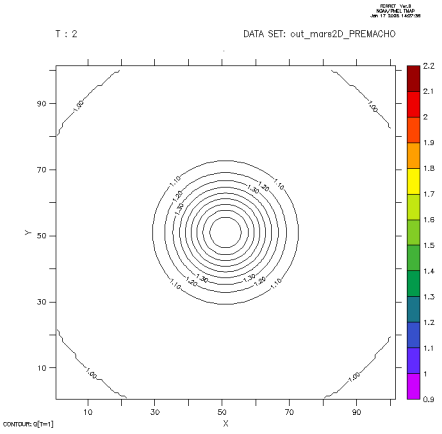
(a) Upwind



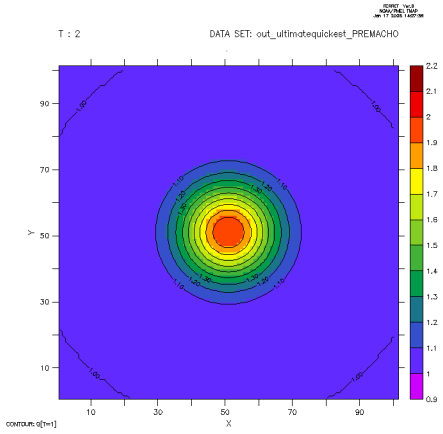
(b) QUICK



(c) QUICKEST



(d) Mars



(e) Ultimate QUICKEST

FIG. 8.9 – Cas-test 1 : advection diagonale d'une tache gaussienne avec la méthode de splitting simple (8.32–8.33). $CFL = 0.9$.

8.4.2 Préservation des constantes

Le second cas-test consiste à vérifier qu'un champ scalaire initialement constant reste constant au cours de son transport par un champ de vitesse à divergence nulle. Pour cela, on utilise le champ de vitesse du cas-test proposé par Smolarkiewicz (Smolarkiewicz, 1992) pour transporter un champ initialement égal à 1. Il est défini sur un domaine carré de côté L par la fonction courant :

$$\psi(x,y) \;=\; \frac{\mathrm{CFL}\,\Delta x}{4\pi\Delta t}\;\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{2\pi y}{L}\right) \tag{8.38}$$

On a donc $\vec{u} = (\partial_y\psi, -\partial_x\psi)^T$; ce champ de vitesse est représenté sur la figure 8.10.

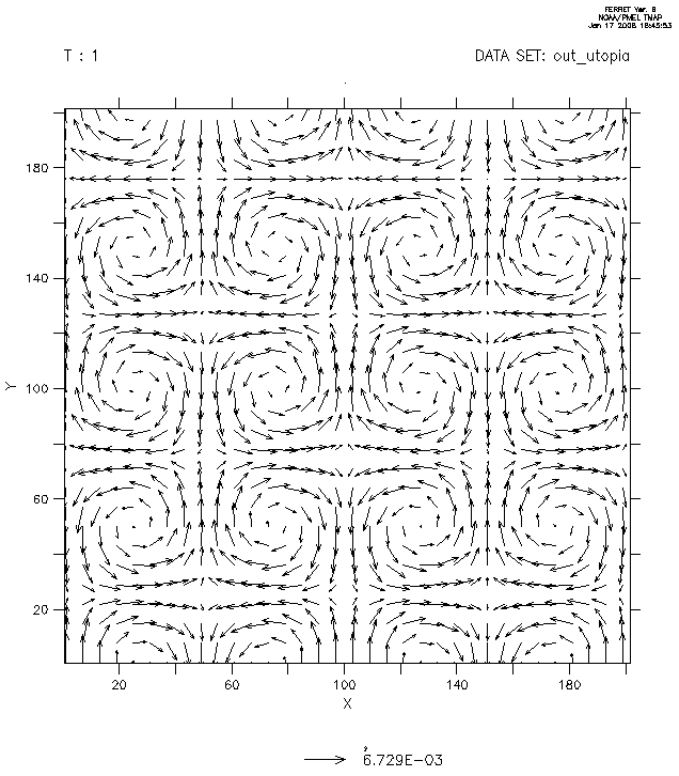
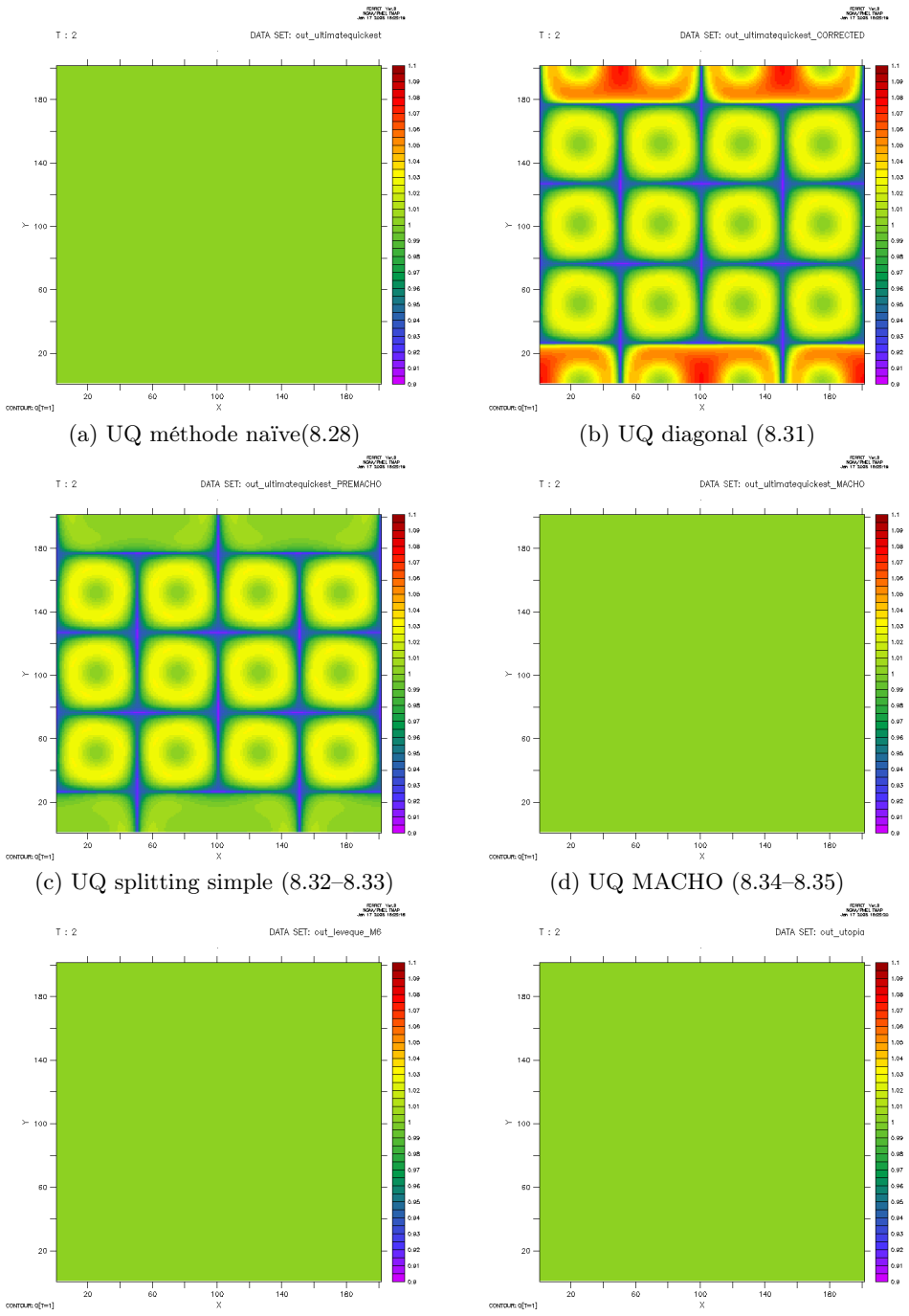


FIG. 8.10 – Cas-test 2 : champ de vitesse

Nous comparons les méthodes de LeVeque M4 et M6 ainsi que les différentes méthodes d'extension 2D avec le schéma Ultimate QUICKEST pour un nombre de Courant égal à 0.25. Les résultats sont représentés sur la figure 8.11. Sur cette figure, on peut voir que toutes les méthodes ne sont pas équivalentes pour la conservation des champs constants. En effet, seuls les panneaux (a) et (d) utilisant le schéma Ultimate QUICKEST conservent les champs constant dans les configurations d'extension 2D simple et de méthode MACHO. Dans le cas où l'on ajoute les termes diagonaux (b) ou dans le cas où le splitting est réalisé de manière simple (c), cette propriété de conservation n'est pas obtenue. Les résultats montrent l'apparition de structures en "Egg-Cup" caractéristiques pour le champ de vitesse utilisé pour l'advection. Pour les deux autres schémas présentés, LeVEque méthode 6 (e) et UTOPIA (f), la conservation du champ constant est obtenue. Tout comme dans l'Ultimate QUICKEST en version MACHO (d), ces schémas font intervenir les termes croisés de façon adéquates.

Nous avons présentés les résultats des différentes méthodes d'extension en 2D pour le shcéma Ultimate QUICKEST, les propriétés de conservations des champs constants ne dépendent pas du choix du schéma dans ce test. Nous aurions obtenu des résultats tout à fait similaire avec l'utilisation du schéma Upwind ou QUICKEST. Plus généralement, si le shcéma conserve les constantes en une dimension, l'utilisation de la méthode MACHO assurera la conservation des champs constants pour le passage en 2D.



(a) UQ méthode naïve(8.28)

(b) UQ diagonal (8.31)

(c) UQ splitting simple (8.32–8.33)

(d) UQ MACHO (8.34–8.35)

(e) Leveque M6

(f) UTOPIA

FIG. 8.11 – Cas-test 2 : advection d'un champ scalaire constant par un champ de vitesse variable en espace. Méthodes de de la partie (8.3) avec le schéma 1D Ultimate QUICKEST et méthode de LeVeque M6 et UTOPIA. $CFL = 0.25$.

8.4.3 Déformation

Le troisième cas-test utilise le champ de vitesse représenté sur la figure 8.10 pour transporter un champ scalaire initialement constitué d'un cône positionné au centre du domaine carré de côté L, comme dans le cas-test proposé par Smolarkiewicz (Smolarkiewicz, 1992). Cependant, le champ de vitesse varie temporellement et est défini par :

$$\vec{u}(x,y,t) \;=\; \begin{pmatrix} \partial_y\psi(x,y) \\ -\partial_x\psi(x,y) \end{pmatrix} \cos\left(2\pi\tfrac{t}{T}\right) \tag{8.39}$$

de manière à ce que le profil retrouve sa position et sa forme originales au temps T correspondant à la fin de la simulation.

Il existe une solution analytique au problème de Smolarkiewicz. A l'aide d'une méthode des caractéristiques on arrive à formé le champ solution pour un instant donné cependant le calcul n'est pas trés simple. C'est pourquoi nous avons choisie cette méthode d'"aller-retour". On connait alors la solution finale qui est l'instant initial. De part la construction du test, la tache de traceurs qui se trouve au centre du domaine à l'instant initiale ne doit pas se propager au-delà des 6 cellules centrales. Par cellule, on entend ici les zones déterminer par un tourbillion. Ces zones sont facilement reconnaissables dans le panneau (b) de la figure 8.11 par exemple. Le reste du domaine est théoriquement "non-accéssible" par la tâche de traceur.

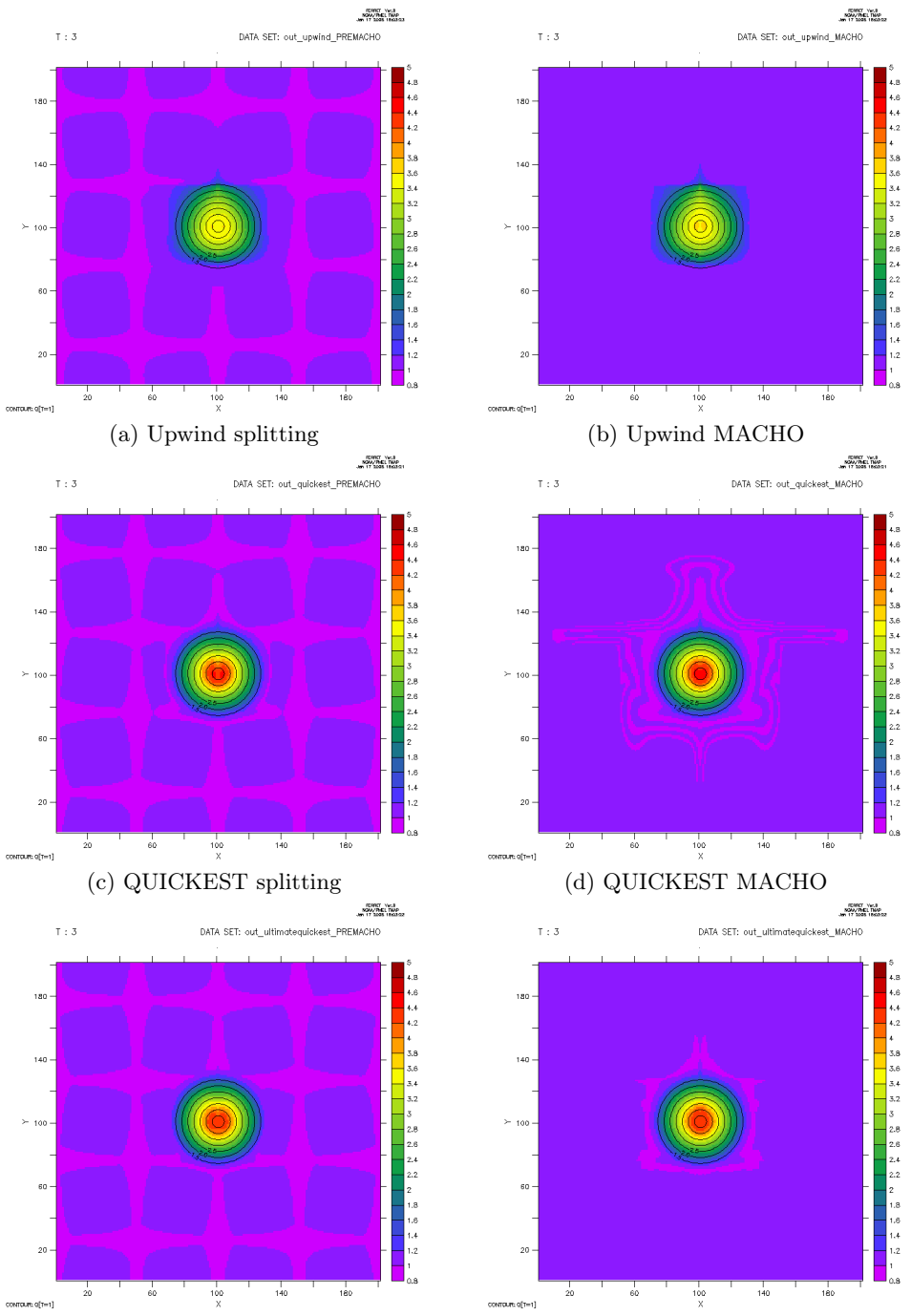
Ce test n'est pas parfait, il est très dépendant de la finesse de la grille de calcul. Comme le champ de vitesse s'enroule sur lui-même, rapidement les valeurs de traceurs se retrouvent "mélangées" dans la même cellule. Ce qui a pour conséquence qu'au moment de faire l'inversion, on ne parvient pas à découpler ces valeurs confondues de traceurs créant ainsi des distorsions dans le champ résultat. Néanmoins les résultats peuvent quand même nous apprendre des informations sur les capacités des différents schémas.

La figure 8.12 montre le résultat pour la méthode de splitting simple et la méthode MACHO avec les schéma Upwind, QUICKEST et Ultimate QUICKEST (UQ). Les contours donnent la position initiale du cône de traceur. Dans cette figure, on retrouve sur la partie constant du champ initiale la signature des structures en "Egg-cup" mises en évidence à la figure 8.11. Pour les trois schémas, on voit apparaître une déformation du cône. Cette déformation est liée à la remarque faite sur la finesse de la grille de calcul dans ce cas test.

Sur le panneau (b), on peut voir également que conformément aux autres tests, que le schéma Upwind est diffusif. Sur les panneaux (d) et (f), pour les schémas QUICKEST et l'Ultimate QUICKEST, la tâche de traceur est sensiblement équivalente. L'amplitude de la tache est cependant plus forte dans le QUICKEST. De plus pour ce schéma on peut voir un signal de faible amplitude s'éttendre dans la partie "non-accessible" du cas-test. Ces différences entre les deux schémas sont dues au limiteur qui est utilisé dans le schéma Ultimate. Sans ce dernier, le QUICKEST crée des "undershoots" et des "overshoots" plus importants que dans la version limité par Ultimate. Les undershoots atteignent ici la zone non-accessible pour le schéma QUICKEST.

La figure 8.13 montre le résultat pour les méthodes de LeVeque M4 et M6, UTOPIA et le schéma de Mars avec la méthode naïve (8.28) d'extension 2D. Le nombre de Courant est fixé à 0.25. Pour les méthode 4 et 6 de LeVeque, ainsi que pour le schéma UTOPIA, les résultats sont comparables à ces du schéma QUICKEST non limité. Ce n'est pas étonnant du fait que ces schémas n'ont pas non plus de limiteur. Ils présentent tous des undershoots parasitants la zone non-accessible du domaine. Pour ce qui est de l'aspect de la tache centrale, là aussi les résultats sont équivalants. Sur le panneau (d), le shcéma de MARS donne un résultat un peu différent. Les undershoots ne sont pas présents, mais surtout la tache centrale présente une déformation plus importante.

Sur l'ensemble des résultats, l'Ultimate QUICKEST se distingue des autres schémas par la présence d'une étape limiteur dans sa construction ce qui diminue l'impact des undershoots et des overshoots dans ce test.

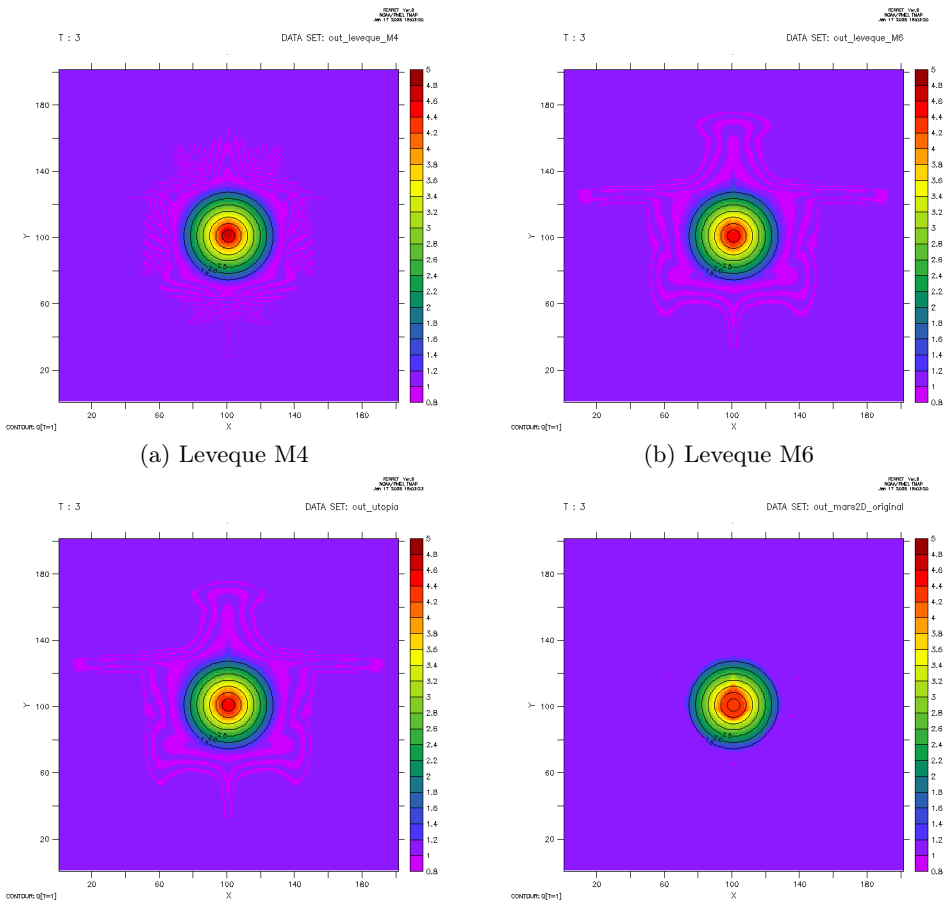


(a) Upwind splitting (b) Upwind MACHO

(c) QUICKEST splitting (d) QUICKEST MACHO

(e) UQ splitting (f) UQ MACHO

FIG. 8.12 – Cas-test 3 : déformation d'un cône avec les méthodes de splitting simple (8.32–8.33) et MACHO (8.34–8.35). $CFL = 0.25$.



(a) Leveque M4 (b) Leveque M6

(c) UTOPIA (d) Mars

FIG. 8.13 – Cas-test 3 : déformation d'un cône avec les méthodes de Leveque et UTOPIA, ainsi qu'avec le schéma de Mars. $CFL = 0.25$.

8.4.4 Convergence

Reprenons le cas-test d'advection diagonale présenté dans la partie 8.4.1. Un profil bidimensionnel est transporté sur un domaine carré périodique, avec un champ de vitesse constant $(u, v) = (1, 1)$. Nous allons procéder à une analyse de la convergence des schémas qui étaient stables pour ce cas-test. En fixant le nombre de Courant à CFL $= 0.75$, nous réalisons une simulation correspondant à 1 tour de domaine.

La figure 8.14 représente l'erreur RMS produite par les différents schémas en fonction du pas de discrétisation en espace, en échelle log–log, pour un profil gaussien (a) et un profil carré (b). Nous avons testé la méthode MACHO (8.34)–(8.35) avec les flux 1D Upwind, QUICKEST et Ultimate QUICKEST, les méthode de LeVeque M4 et M6 et le schéma UTOPIA.

Pour le profil gaussien, régulier, nous observons que le schéma Upwind MACHO est comme prévu d'ordre 1. En revanche, le seul schéma d'ordre 3 est le QUICKEST MACHO. Pour tous les autres, l'erreur ne décroît que de deux ordres de grandeur par rapport au pas de discrétisation en espace. Dans cette catégorie, le plus précis est le schéma Ultimate QUICKEST MACHO.

Pour le profil carré, qui n'est pas régulier (au sens mathématique du terme) et par conséquent pour lequel l'analyse de convergence n'est pas pertinente, tous les schémas numériques théoriquement d'ordre 3 se situent dans une fourchette étroite en termes de précision.

8.4.5 Coût de calcul

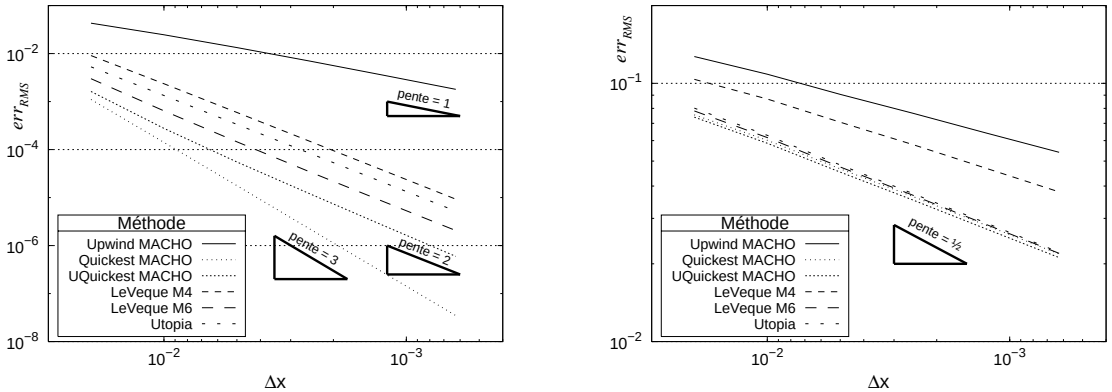
Nous allons terminer par comparer le coût de calcul de différentes méthodes proposées. Pour cela, reprenons le cas-test de la déformation de la partie 8.4.3. Le domaine discrétisé avec un pas d'espace $\Delta x = \Delta y = \frac{L}{200}$, la durée de simulation est fixée à $T = 300$ secondes et le nombre de Courant à CFL $= 0.3$.

Nous utilisons comme référence la méthode naïve (8.28) pour laquelle les flux 1D sont calculés avec le schéma Upwind (noté Upw). Nous lui comparons la méthode MACHO avec des flux QUICKEST (Q M), Ultimate QUICKEST (UQ M) et le schéma de Mars (Mars M), les méthodes de Leveque d'ordre 1, 2 et 3 (respectivement M2, M4 et M6) ainsi que le schéma UTOPIA.

		Upw	Q M	UQ M	Mars M	M2	M4	M6	UTOPIA
-O2	T_{exec}	6.55	12.48	16.39	12.37	15.73	26.35	26.20	14.52
	Ratio	1	1.91	2.50	1.89	2.40	4.02	4.00	2.22
-O3	T_{exec}	6.44	10.66	16.28	13.11	9.93	25.98	24.37	13.29
	Ratio	1	1.66	2.53	2.04	1.54	4.04	3.78	2.06

TAB. 8.1 – Temps d'exécution de différents schémas d'advection 2D.

Les mesures ont été effectués sur un processeur Intel Xeon cadencé à 3.73 GHz et le code a été produit avec le compilateur Intel Fortran 9.1.



(a) Tache gaussienne (b) Tache carrée

FIG. 8.14 – Convergence de schémas d'advection 2D pour le transport diagonal d'une tache sur un domaine périodique. 1 tour, $CFL = 0.75$.

Dans un premier temps, nous avons utilisé les options de compilation par défaut, correspondant à des optimisations standards (-O2). Les résultats correspondants sont reportés sur les deux premières lignes du tableau 8.1. Nous avons ensuite utilisé des options de compilation mettant en œuvre des optimisations plus poussées (-O3). Dans chaque cas, nous avons reporté le temps d'exécution T_{exec} du cas test en secondes, ainsi que le rapport avec le schéma de référence Upwind.

8.5 Cas tests 3D

8.5.1 Test dans MARS : Vortex Barocline

Dans cette partie, on présente les résultats de l'utilisation des schémas de LeVeque méthode 6 et Ultimate-QUICKEST MACHO dans le cas du cas test du vortex barocline en trois dimensions. La méthode MACHO que nous avons utilisée repose sur un principe de non-divergence horizontale. Ce qui n'est pas le cas dans ce cas test où c'est la non-divergence 3D qui est vérifiée. Il est possible de réécrire les routines MACHO en 3D. C'est un peu plus coûteux en temps de calcul. Alors nous avons pris le parti que la vitesse verticale est faible devant les vitesses horizontales. C'est le cas en générale dans l'océan. Il est certainement possible de trouver des cas ou cette approximation n'est plus du tout vérifiée. Il faudrait alors dans ces conditions utiliser une version véritablement 3D de la méthode MACHO. Des tests réalistes devraient nous permettre de conclure sur cette question.

Figure 8.15, on peut voir le champ de température de surface dans le cas de l'utilisation du schéma de LeVeque pour le 100 ème jour de simulation. Figure 8.16 on a reporter les résultats pour le schéma Ultimate-QUICKEST MACHO. En comparant les deux champs, on peut voir que les intensités sont du même ordre de grandeur. On n'observe pas qu'un schéma diffuse plus que l'autre. Les structures ne semblent pas plus différentes. Par contre la position du Vortex n'est pas la même. Comme dans le cas de la comparaison entre le schéma de MARS et le schéma Upwind d'ordre 1, on trouve ici une différence de position pour le vortex entre les deux calculs. Pour le LeVeque, le vortex s'est déplacé plus vers l'ouest. Globalement dans les deux simulations, on a observé le même comportement pour que le schéma standard. A savoir que la propagation est au début dans la direction Sud-Ouest. Puis la structure oblique vers le sud. Dans le cas du schéma de LeVeque, la propagation vers le sud est un peu plus rapide. Mais en fin de silmulation, les deux vortex on pratiquement la même latitude.

Avec les problèmes de propagation du vortex que nous avons mis en évidence, il est difficile de tirer des conclusions sur les observations de la propagations. Nous avons remarqué que le vortex se déplace plus si il y a de la diffusion dans le calcul.

Dans l'écriture du schéma de type MACHO, Leonard a montré l'importance de faire de l'alternance sur le calcul d'advection de type lagrangienne en la réalisant tantôt avec u, tantôt avec v. Le schéma temporel de MARS fait le calcul en u et en v en alternance. Nous nous sommes alors posé la question de savoir si il était préférable de faire une advection en u ou en v après le calcul en u. Nous n'avons pas fait l'analyse théorique de cette question. Par contre nous avons tester les deux calculs expérimentalement. Il s'avère que les résultats sont quasiment identiques pour les 90 premiers jours de simulations. Mais dans le cas ou l'on advecte en u après le calcul en ligne, la solution explose au bout de 94 jours. Un faible instabilité se développe et fini par diverger. Il est donc à priori pas préférable d'utiliser cette combinaison mais plutôt de faire l'advection en v après le calcul en ligne et l'advection en u après le calcul en colonne.

8.5.2 Tests en configurations réalistes

Nous avons commencé à effectyer des tests sur la configuration réaliste du Golf de Gascogne sans bancs découvrants. Les résultats obtenus avec les schémas Ultimate Quickest et Ultimate Quickest Macho sont actuellement à l'étude.
A titre d'exemple, la figure (8.17) représente les différences obtenues entre le schéma de MARS original le schéma Ultimate Quickest et le schéma Ultimate Quickest. Les analyses fines des différences sont actuellement en cours, mais ces expériences permettent de valider les développements effectués dans des configurations plus réalistes.

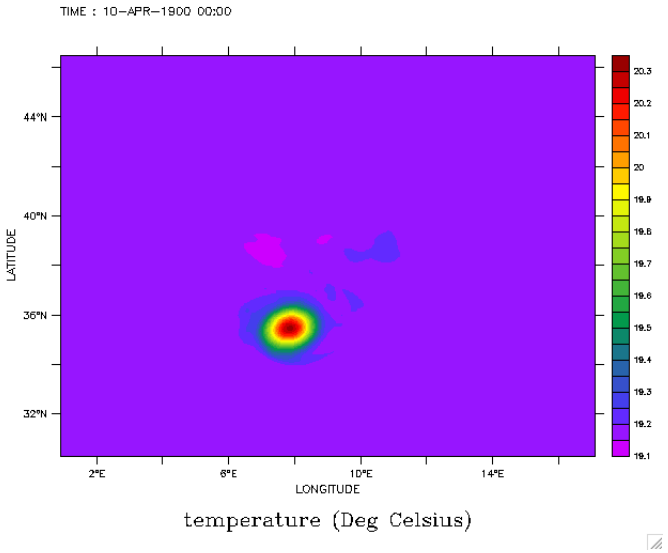


FIG. 8.15 – Champ de température de surface du cas test Vortex Barocline au bout de 100 jours dans le cas où l'advection utilise le schéma de LeVeque méthode 6.

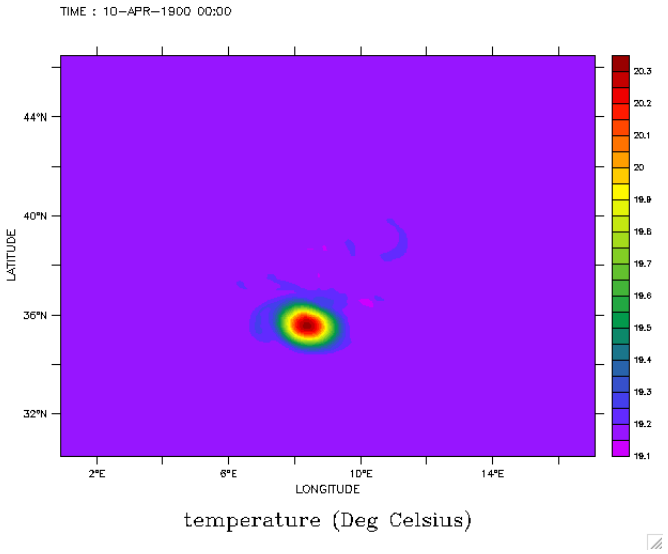


FIG. 8.16 – Champ de température de surface du cas test Vortex Barocline au bout de 100 jours dans le cas où l'advection utilise le schéma le Ultimate Quickest Macho.

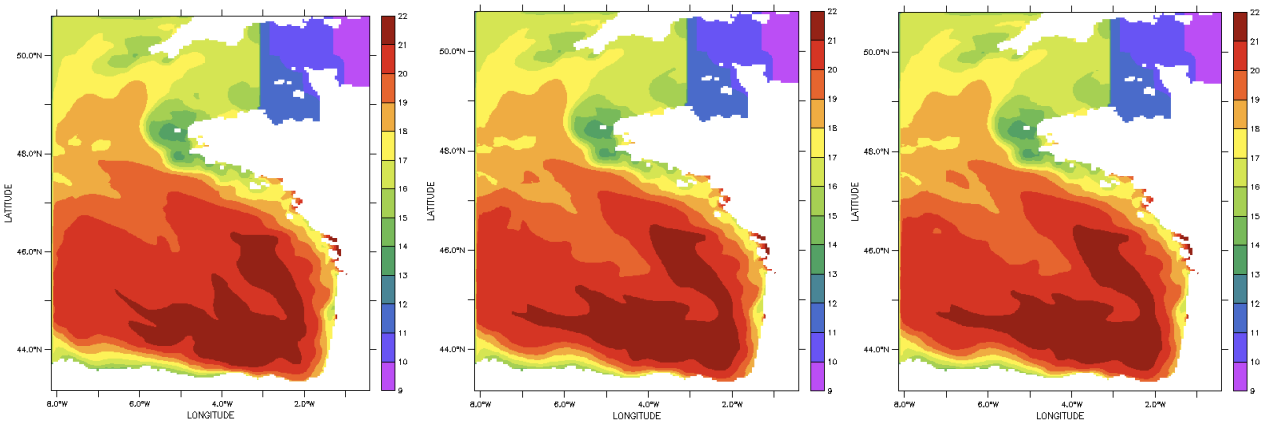


FIG. 8.17 – Instantanné de température de surface dans le golfe de Gascogne (au 19 août) . Schéma de MARS (à gauche) - Ultimate Quickest (au milieu) et Ultimate Quickest Macho (à droite)

8.6 Conclusion

Au cours de l'analyse ainsi que sur les résultats expérimentaux, nous avons mis en évidence les limitation du schéma d'advection actuel de MARS. Bien qu'il soit certainement le meilleur dans le cas de la gestion de profil abrupt de traceur (comme dans le cas d'une structure frontale), cela représente malheureusement également sa tendance à rendre carré un profil gaussien soumis à une advection simple. En plus de cette tendance à dèformer ce type de profil, il est aussi instable. Ce qui limite alors la taille des pas de temps pour l'intégration. Un autre point qui est ressorti de l'étude, c'est la nécessité de l'utilisation d'une véritable méthode multi-dimentionelle en 2D (ou même en 3D).

Pour remédier à ces problèmes, les différents tests nous permettent de proposer plusieurs solutions. Tout d'abord, un schéma QUICKEST en version multi-dimensionelle MACHO est envisageable. Elle est à la fois stable est pour une cfl inférieur à 1, il est d'ordre 3 en temps et en espace et il est peu dispersif. Le coût de calcul est de plus relativement faible par rapport au schéma actuel de MARS (de l'ordre de 20%). Cela peut être une solution très acceptable pour les traceurs dynamique (température et slinité). Cependant, n'étant pas limité, il produit des undershoots et des overshoots. Ce qui peut amener un traceur strictement positif à devenir négatif ce qui est tout à fait inacceptable pour des traceurs biologiques par exemple.

Une version limité de ce schéma peut alors être utilisée : c'est l'Ultimate QUICKEST en version MACHO. Ce schéma est simplement une version limité par le limiteur universel de Leonard. Il est alors monotone (en une dimension). Il présente les mêmes propriétés de stabilité que la version sans limiteur. Le coût de calcul est bien entendu maintenant plus important. Ce n'est pas n'égligeable, surtout dans le cas de son utilisation pour les traceurs biologiques qui sont souvent nombreux. Il s'agit maintenant d'évaluer dans les configurations réalistes cibles du modèle MARS, comme nous avons commencé à le faire pour la configuration golfe de Gascogne, les améliorations liées à l'utilisation de ces schémas.

Chapitre 9

Bancs découvrants

Sommaire

9.1 Schéma actuel 153
9.2 Méthode FCT : Flux Corrected Transport 154
9.2.1 FCT 1D (Boris et Book (1973) 154
9.2.2 FCT 2D 156
9.3 Préservation d'une hauteur d'eau positive : proposition de modification . . . 156
9.4 Application au modèle MARS : algorithme 157

Dans ce chapitre, nous présentons une idée de traitement des bancs découvrants. Parmi l'ensemble des problèmes liés au traitement des bancs découvrants, nous nous concentrons uniquement sur l'objectif de préserver une hauteur d'eau positive au cours de la simulation. Le traitement du passage du 3D au 2D et inversement n'est donc pas abordé.

9.1 Schéma actuel

Le schéma actuel ne préserve pas une hauteur d'eau positive. Cependant, les bancs découvrants sont gérés efficacement grâce à l'introduction de profondeurs au repos de chaque côté des mailles. La figure (9.1) montre la définition des profondeurs sur une maille de calcul.

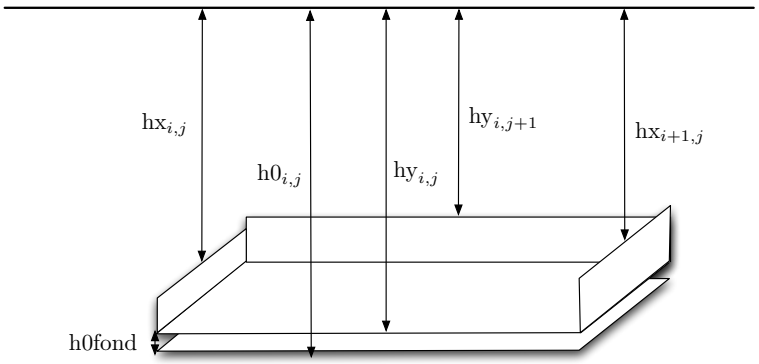


FIG. 9.1 – hauteurs d'eau

La profondeur sur les faces est tout d'abord définie de manière indépendante sur les faces. La valeur au centre est prise égale au minimum des 4 valeurs sur les faces auquel on ajoute une épaisseur minimale égale à h0fond

$$\mathrm{h0}_{i,j} = \max\left(\mathrm{hx}_{i,j}, \mathrm{hx}_{i+1,j}, \mathrm{hy}_{i,j}, \mathrm{hy}_{i,j+1}\right) + \mathrm{h0fond}$$

Les profondeurs utilisées dans le calcul des flux d'eau sont prises égales à $\mathrm{hx}+\eta, \mathrm{hy}+\eta$, cependant le calcul du volume utilisé pour l'advection des traceurs se base lui sur la hauteur $\mathrm{h0}+\eta$. Ainsi même si la hauteur d'eau devient légèrement négative, la valeur de $\mathrm{h0}+\eta$ reste positive.

Bien entendu, les résultats de la simulation sont alors sensible à la valeur de h0fond. C'est ce point que nous abordons ici est mettant en place un schéma positif permettant de garder une valeur de h0fond très petite. Nous proposons un algorithme basé sur la méthode FCT que nous décrivons dans un cadre général dans le paragraphe suivant.

9.2 Méthode FCT : Flux Corrected Transport

On introduit ici la méthode FCT. Cette méthode est d'abord présentée en dimension 1, puis son extension à la dimension 2 est ensuite abordée.

9.2.1 FCT 1D (Boris et Book (1973)

On considère notre schéma aux volumes finis :

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(F_{j+1/2} - F_{j-1/2}\right)$$

Supposons disposer de deux approximations des flux numériques : $F^l_{j\pm1/2}$ et $F^h_{j\pm1/2}$.
$F^l_{j\pm1/2}$ est une approximation d'ordre peu élevé (ordre 1) qui est monotone.
$F^h_{j\pm1/2}$ est une approximation d'ordre élevé.
On note

$$A_{j+1/2} = F^h_{j+1/2} - F^l_{j+1/2}$$

le flux *anti-diffusif*.
L'algorithme est le suivant :

- Calculer une estimation monotone de u_j^{n+1} :

$$u_j^l = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(F^l_{j+1/2} - F^l_{j-1/2}\right)$$

- Correction

$$u_j^{n+1} = u_j^l - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(A^c_{j+1/2} - A^c_{j-1/2}\right), \qquad A^c_{j+1/2} = C_{j+1/2}A_{j+1/2}$$

  Si $C = 1$ on obtient un schéma d'ordre élevé, si $C = 0$ on obtient le schéma monotone.

C est choisi pour limiter la création de nouveaux extrema et empêcher l'amplification des extremas existants. Le choix suivant y conduit :

$$A^c_{j+1/2} = S_{j+1/2}\max\left\{0, \min\left[|A_{j+1/2}|, S_{j+1/2}(u^l_{j+2} - u^l_{j+1})\frac{\Delta x}{\Delta t}, S_{j+1/2}(u^l_j - u^l_{j-1})\frac{\Delta x}{\Delta t}\right]\right\}$$

où $S_{j+1/2}$ est égal au signe de $A_{j+1/2}$:

$$S_{j+1/2} = \frac{A_{j+1/2}}{|A_{j+1/2}|}$$

Si $A_{j+1/2}$ est positif le flux anti-diffusif est donné par :

$$\frac{\Delta t}{\Delta x}A^c_{j+1/2} = \max\left\{0, \min\left[\frac{\Delta t}{\Delta x}A_{j+1/2}, (u^l_{j+2} - u^l_{j+1}), (u^l_j - u^l_{j-1})\right]\right\}$$

Sur la figure (9.2), le flux antidiffusif est vers la droite dans le sens du gradient, comme c'est le cas le plus courant.
Le deuxième argument du minimum assure que le flux antiffusif ne va conduire à une valeur u_{j+1} qui sera supérieure à u_{j+2}. Pour cela, on écrit :

$$u^{n+1}_{j+1} = u^l_{j+1} - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(A^c_{j+3/2} - A^c_{j+1/2}\right) \leq u^l_{j+2} \tag{9.1}$$

soit comme $A_{j+3/2}$ est supposé positif dans notre exemple,

$$u^l_{j+1} + \frac{\Delta t}{\Delta x}A^c_{j+1/2} \leq u^l_{j+2} \tag{9.2}$$

soit

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} A^c_{j+1/2} \leq (u^l_{j+2} - u^l_{j+1})$$

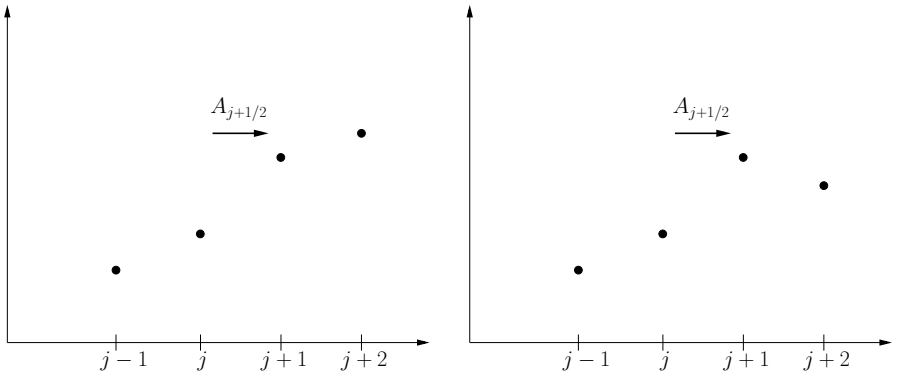


FIG. 9.2 – flux antidiffusif, limité à gauche, mis à zéro à droite

Exemple : Equation d'advection linéaire 1D :
On considère une équation d'advection linéaire et on considère comme flux d'ordre élevé le flux du schéma de Lax-Wendroff.

$$F^l_{j+1/2} = \frac{a}{2}(u_j + u_{j+1}) - \frac{|a|}{2}(u_{j+1} - u_j)$$
$$F^h_{j+1/2} = \frac{a}{2}(u_j + u_{j+1}) - \frac{a^2 \Delta t}{2\Delta x}(u_{j+1} - u_j)$$

Amélioration de la méthode : le limiteur de Zalesak

Le limiteur de Boris et Book mets des limites aux flux antidiffusifs sans tenir compte du fait que les flux voisins peuvent faire que cela n'est pas nécessaire. Par exemple, pour déduire (9.2) de (9.1), nous n'avons pas pris en compte que le flux $A_{j+3/2}$ pouvait potentiellement augmenter la valeur possible du flux $A_{j+1/2}$. La méthode Zalesak (1979) est une amélioration de la méthode originale FCT qui corrige cela. Elle se décompose en plusieurs étapes :

1. Soit
$$u^{\max}_j = \max(u^n_{j-1}, u^n_j, u^n_{j+1}, u^l_{j-1}, u^l_j, u^l_{j+1})$$
$$u^{\min}_j = \min(u^n_{j-1}, u^n_j, u^n_{j+1}, u^l_{j-1}, u^l_j, u^l_{j+1})$$
2. Calcul de la somme des flux antidiffusifs dans le maille j :
$$P^+_j = \max(0, A_{j-1/2}) - \min(0, A_{j+1/2})$$
3. Calcul du flux antidiffusif (flux net, ie $(-(A^c_{j+1/2} - A^c_{j-1/2}))$ maximum qui préserve la monotonicité : $u^{n+1}_j \leq u^{\max}_j$
$$Q^+_j = (u^{\max}_j - u^l_j)\frac{\Delta x}{\Delta t}$$
4. Calcul la limitation à mettre sur ces flux
$$R^+_j = \begin{cases} \min(1, Q^+_j / P^+_j) & \text{si } P^+_j > 0, \\ 0 & \text{si } P^+_j = 0 \end{cases}$$
5. Faire le même pour les flux sortant de la maille j
$$P^-_j = \max(0, A_{j+1/2}) - \min(0, A_{j-1/2})$$
$$Q^-_j = (u^l_j - u^{\min}_j)\tfrac{\Delta x}{\Delta t}$$
$$R^-_j = \begin{cases} \min(1, Q^-_j / P^-_j) & \text{si } P^-_j > 0, \\ 0 & \text{si } P^-_j = 0 \end{cases}$$

6. Calculer $C_{j+1/2}$

$$C_{j+1/2} = \begin{cases} \min(R^+_{j+1}, R^-_j) & \text{si } A_{j+1/2} > 0 \\ \min(R^+_j, R^-_{j+1}) & \text{si } A_{j+1/2} < 0 \end{cases}$$

9.2.2 FCT 2D

La méthode FCT avec limiteur de Zalesak peut s'étendre au 2D en modifiant les valeurs des flux totaux et le choix des valeurs admissibles.

$$P^+_{i,j} = \max(0, A_{i-1/2,j}) - \min(0, A_{i+1/2,j}) + \max(0, A_{i,j-1/2}) - \min(0, A_{i,j+1/2})$$
$$P^-_{i,j} = \max(0, A_{i+1/2,j}) - \min(0, A_{i-1/2,j}) + \max(0, A_{i,j+1/2}) - \min(0, A_{i,j-1/2})$$

Soit

$$u^a_{i,j} = \max(u^n_{i,j}, u^l_{i,j}), \qquad u^b_{i,j} = \min(u^n_{i,j}, u^l_{i,j})$$

On définit les valeurs max et min par :

$$u^{\max}_{i,j} = \max\left(u^a_{i,j}, u^a_{i,j-1}, u^a_{i,j+1}, u^a_{i-1,j}, u^a_{i+1,j}\right)$$
$$u^{\min}_{i,j} = \min\left(u^b_{i,j}, u^b_{i,j-1}, u^b_{i,j+1}, u^b_{i-1,j}, u^b_{i+1,j}\right)$$

Calcul du flux monotone en 2D

Le flux monotone peut être obtenu à l'aide d'un schéma amont. Cependant comme nous l'avons déjà vu dans le chapitre sur les schémas d'advection, il peut s'avérer utile d'utiliser comme flux monotone un schéma introduisant les termes croisés qui permet de diminuer à la fois l'erreur dans la diagonale ainsi que d'augmenter la constante de stabilité.

9.3 Préservation d'une hauteur d'eau positive : proposition de modification

Nous proposons ici d'utiliser cet algorithme FCT pour garantir une hauteur d'eau positive. Bien entendu la correction apportée au flux ne sera apporté que dans les zones qui peuvent se découvrir. Les autres zones ne seront pas modifiées par la mise en œuvre de cet algorithme, le schéma temporel restera donc basé sur le schéma temporel implicite.
Dans le paragraphe précédent, il était utilisé afin de conserver de rendre un schéma monotone. Il est ici utilisé uniquement dans le but d'obtenir des champs positifs (ou supérieur à une valeur fixée quelconque). Ceci conduit à plusieurs simplifications. Rappelons tout d'abord le principe sur l'équation de continuité : On considère le schéma d'ordre élevé suivant :

$$\eta^{n+1}_j = \eta^n_j - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(F_{j+1/2} - F_{j-1/2}\right)$$

Les flux $F_{j+1/2}$ correspondent ici au schéma centré d'ordre 2 en espace. Soit de plus, $F^l_{j\pm1/2}$ le flux issu d'un schéma monotone (par exemple flux upwind).
On note

$$A_{j+1/2} = F_{j+1/2} - F^l_{j+1/2}$$

le flux *anti-diffusif*.
L'algorithme simplifié s'écrit alors :

- Calculer une estimation monotone de η^{n+1}_j :

$$\eta^l_j = \eta^n_j - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(F^l_{j+1/2} - F^l_{j-1/2}\right)$$

- Correction

$$\eta^{n+1}_j = \eta^l_j - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(A^c_{j+1/2} - A^c_{j-1/2}\right), \qquad A^c_{j+1/2} = C_{j+1/2}A_{j+1/2}$$

Soit hmin la valeur minimale que l'on désire obtenir (c'est à dire que l'on souhaite que $\mathrm{h0}_{i,j} + \eta_{i,j} \geq \mathrm{hmin}, \quad \forall (i,j)$), l'algorithme original de Zalesak pour le calcul des coefficients $C_{j+1/2}$ se simplifie en

1.
$$P_j^- = \max(0, A_{j+1/2}) - \min(0, A_{j-1/2})$$
$$Q_j^- = (\eta_j - (\mathrm{hmin} - \mathrm{h0}_{i,j}))\frac{\Delta x}{\Delta t}$$
$$R_j^- = \begin{cases} \min(1, Q_j^-/P_j^-) & \text{si } P_j^- > 0, \\ 0 & \text{si } P_j^- = 0 \end{cases}$$

2. Calculer $C_{j+1/2}$
$$C_{j+1/2} = \begin{cases} R_j^- & \text{si } A_{j+1/2} > 0 \\ R_{j+1}^- & \text{si } A_{j+1/2} < 0 \end{cases}$$

9.4 Application au modèle MARS : algorithme

Nous écrivons ici l'application qui pourrait être faite de l'algorithme précédent au modèle MARS. Nous utiliserons ici le nouveau schéma 2D. Dans ce cas le schéma s'écrit :

$$\left\{\begin{array}{rcl} u^{n+1/2,\star} &=& u^n - i\dfrac{\mathrm{dt}}{2}\left[u_0k_x + v_0k_y\right]u^n - igk_x\dfrac{dt}{2}\eta^n \\ v^{n+1/2,\star} &=& v^n - i\dfrac{\mathrm{dt}}{2}\left[u_0k_x + v_0k_y\right]v^n - igk_y\dfrac{dt}{2}\eta^n \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} \eta^{n+1/2,\star} &=& \eta^n - ih_0k_x\dfrac{\mathrm{dt}}{2}\left[\alpha\,u^n + (1-\alpha)\,u^{n+1/2}\right] - ih_0\dfrac{\mathrm{dt}}{2}k_y\left[\alpha v^n + (1-\alpha)v^{n+1/2,\star}\right] \\ && \quad -i\dfrac{\mathrm{dt}}{2}\left[u_0k_x + v_0k_y\right]\eta^n \\ u^{n+1/2} &=& u^n - igk_x\dfrac{\mathrm{dt}}{2}\left[\alpha\,\eta^n + (1-\alpha)\,\eta^{n+1/2,\star}\right] - i\dfrac{\mathrm{dt}}{2}\left[u_0k_x + v_0k_y\right]u^{n+1/2,\star} \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} \eta^{n+1/2} &=& \eta^n - ih_0k_x\dfrac{\mathrm{dt}}{2}\left[\alpha\,u^n + (1-\alpha)\,u^{n+1/2}\right] - ih_0\dfrac{\mathrm{dt}}{2}k_y\left[\alpha v^n + (1-\alpha)v^{n+1/2}\right] \\ && \quad -i\dfrac{\mathrm{dt}}{2}\left[u_0k_x + v_0k_y\right]\left[\alpha\eta^n + (1-\alpha)\eta^{n+1/2,\star}\right] \\ v^{n+1/2} &=& v^n - igk_y\dfrac{\mathrm{dt}}{2}\left[\alpha\,\eta^n + (1-\alpha)\,\eta^{n+1/2}\right] - i\dfrac{\mathrm{dt}}{2}\left[u_0k_x + v_0k_y\right]v^{n+1/2,\star} \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} u^{n+1,\star} &=& u^{n+1/2} - i\dfrac{\mathrm{dt}}{2}\left[u_0k_x + v_0k_y\right]u^{n+1/2} - igk_x\dfrac{dt}{2}\eta^{n+1/2} \\ v^{n+1,\star} &=& v^{n+1/2} - i\dfrac{\mathrm{dt}}{2}\left[u_0k_x + v_0k_y\right]v^{n+1/2} - igk_y\dfrac{dt}{2}\eta^{n+1/2} \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} \eta^{n+1,\star} &=& \eta^{n+1/2} - ih_0k_x\dfrac{\mathrm{dt}}{2}\left[\alpha u^{n+1/2} + (1-\alpha)u^{n+1,\star}\right] - ih_0\dfrac{\mathrm{dt}}{2}k_y\left[\alpha v^{n+1/2} + (1-\alpha)v^{n+1}\right] \\ && \quad -i\dfrac{\mathrm{dt}}{2}\left[u_0k_x + v_0k_y\right]\eta^{n+1/2} \\ v^{n+1} &=& v^{n+1/2} - igk_y\dfrac{\mathrm{dt}}{2}\left[\alpha\,\eta^{n+1/2} + (1-\alpha)\,\eta^{n+1,\star}\right] - i\dfrac{\mathrm{dt}}{2}\left[u_0k_x + v_0k_y\right]v^{n+1,\star} \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} \eta^{n+1} &=& \eta^{n+1/2} - ih_0k_x\dfrac{\mathrm{dt}}{2}\left[\alpha\,u^{n+1/2} + (1-\alpha)\,u^{n+1}\right] - ih_0\dfrac{\mathrm{dt}}{2}k_y\left[\alpha v^{n+1/2} + (1-\alpha)v^{n+1}\right] \\ && \quad -i\dfrac{\mathrm{dt}}{2}\left[u_0k_x + v_0k_y\right]\left[\alpha\eta^{n+1/2} + (1-\alpha)\eta^{n+1,\star}\right] \\ u^{n+1} &=& u^{n+1/2} - igk_x\dfrac{\mathrm{dt}}{2}\left[\alpha\,\eta^{n+1/2} + (1-\alpha)\,\eta^{n+1}\right] - i\dfrac{\mathrm{dt}}{2}\left[u_0k_x + v_0k_y\right]u^{n+1,\star} \end{array}\right.$$

Il semble inutile de contraindre les hauteurs d'eau intermédiaires issues de $\eta^{n+1/2,\star}, \eta^{n+1,\star}$ à rester positives. Nous regardons donc uniquement le passage de η^n à $\eta^{n+1/2}$ (le passage de $\eta^{n+1/2}$ à η^{n+1} est similaire).

$$\eta^{n+1/2} = \eta^n - \frac{\mathrm{dt}}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left[\mathrm{hex}_{i,j}\left(\alpha\,u^n + (1-\alpha)\,u^{n+1/2}\right)\right] - \frac{\mathrm{dt}}{2}\frac{\partial}{\partial y}\left[\mathrm{hey}_{i,j}\left(\alpha\,v^n + (1-\alpha)\,v^{n+1/2}\right)\right]$$

Ceux sont ces deux flux d'eau que nous prenons égaux aux flux d'ordre élevés. Notons qu'il ne peuvent être déterminés qu'àprès avoir résolu le système implicite.
Les flux monotones sont eux issus d'un schéma upwind d'ordre 1 :

$$\begin{array}{rcll} F_{i-1/2,j} &=& (\mathrm{h0}_{i-1,j} + \eta^n_{i-1,j})u^n_{i,j}, & \text{si } u^n_{i,j} > 0 \\ &=& (\mathrm{h0}_{i,j} + \eta^n_{i,j})u^n_{i,j}, & \text{si } u^n_{i,j} < 0 \end{array} \tag{9.3}$$

Ils sont donc obtenus en effectuant un décentrage de la hauteur d'eau en amont de l'écoulement. Il faut noter ici que c'est la hauteur d'eau h0 au centre de la maille qu'il faut prendre en compte.
Il est également important de remarquer que nous supposons ici que les vitesses dans les zones découvrantes sont suffisamment faibles pour que la condition de stabilité du schéma explicite $u\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$ soit respectée. Ceci entraîne que le flux donné par (9.3) est effectivement un flux qui conduit à une solution positive. Dans les cas contraires, nous pouvons envisager de limiter le flux monotone lui-même.

Conclusions

Conclusions

Dans ce travail, nous avons procédé à une analyse de certains aspects numériques du modèle MARS. A travers cette étude, plusieurs points importants ont été relevés.

Schéma temporel

Le modèle se base sur une surface libre implicite résolue par une méthode ADI. Ses avantages sont bien connus : stabilité inconditionnelle pour un coût faible car ne nécessitant uniquement la résolution de systèmes tridiagonaux. Le second avantage majeur lié au forçage de la surface libre par une méthode implicite réside dans la très bonne réaction de la surface libre aux conditions aux limites, point très important à prendre en compte notamment pour la simulation des marées. L'utilisation du même pas de temps pour le mode barotrope et les modes baroclines simplifie également le couplage et assure une maintenance plus aisée de certaines propriétés, de conservation des traceurs par exemple.
Nous nous sommes intéressés aux propriétés numériques de base du schéma implicite utilisé. En comparant à une approche time splitting, consistant à découper le pas de temps barocline en petits pas de temps, on s'aperçoit qu'une des différences importantes est dans la dissipation totale des petites échelles dans une approche time-splitting. Ceci permet très certainement d'éviter l'introduction de fréquences temporelles trop élevées dans le mode barotrope.
Nous avons proposé la mise en place d'un nouveau schéma temporel pour le mode barotrope qui permet également de filtrer complètement les petites échelles tout en restant inconditionnellement stable. Le schéma corrige également des problèmes d'oscillations apparaissant sur la surface libre. Ce schéma consiste désormais à une implémentation d'une étape ADI sur u et v à l'intérieur de chaque demi-pas de temps, couplé à une alternance des résolutions d'un demi-pas de temps à l'autre. Il est rendu totalement symétrique par une phase de prédiction explicite qui permet également de garantir la stabilité pour les termes liés au transport. Testé sur les différents cas test 2D et sur un cas réaliste de marée 2D, le schéma s'est montré performant. Il a ensuite été comparé au schéma du modèle ROMS dans un cas test 3D (vortex barocline) où les biais liés au schéma initial semblent avoir été corrigés.
Le schéma temporel 3D est désormais de type Forward Backward pour l'intégration couplée de la dynamique et des traceurs. Ceci lui procure une grande stabilité au modèle.

Schéma d'advection

L'advection des traceurs dans le modèle MARS est effectuée par un schéma à un pas de temps. Le principal avantage est le gain en place mémoire : un seul champ de traceur est conservé en mémoire. Le schéma actuel tente de prévenir l'apparition d'extremas en utilisant un indicateur qui fait passer le schéma d'un schéma Euler-Quick à un schéma Euler-amont. Cependant l'utilisation de cet indicateur et le passage instantané du schéma Euler-Quick au schéma Euler-amont s'est montré problématique sur plusieurs cas test où il a tendance à créer des fronts (dans les directions de la grille de calcul) de manière purement artificielle. L'utilisation d'un limiteur, pondérant le flux d'ordre élevé et le flux monotone, permet de pallier à ce problème. Nous nous sommes orientés vers des schémas qui permettent également d'augmenter l'ordre en temps, grâce à une approche à la Lax-Wendroff, utilisant l'équation originale pour exprimer les dérivées temporelles en fonction des dérivées spatiales. En dimension 2, cette approche n'est efficace que si elle introduit en plus les termes d'erreur correspondant aux dérivées croisées. Plusieurs approches ont été étudiées, mais celle qui parait la plus simple en pratique, est l'approche MACHO qui combine une phase de prédiction utilisant la forme advective des équations à une phase conservative. Ceci conduit à un schéma qui prend en

compte les termes correspondant aux dérivées croisées, tant en étant conservatif et en préservant les champs constants. Comme schéma de base à cette approche, l'utilisation du schéma Ultimate Quickest est la plus prometteuse. Celui-ci conduit à un schéma du 3ème ordre en temps et en espace pour une vitesse d'advection constante en temps et en espace.

Quelques perspectives

L'objectif premier de ce travail était d'identifier par des phases d'analyses numériques les points faibles du modèle MARS3D. Le choix des schémas numériques d'un modèle d'océan est très fortement conditionné par le champ des applications qu'il envisage d'aborder. Dès le départ, le parti a donc été pris de rester dans le cadre applicatif du modèle MARS (non remise en cause du forçage implicite de la surface libre et de l'utilisation de schémas à un pas de temps pour les traceurs).
Il paraît désormais difficile d'améliorer la qualité intrinsèque des schémas numériques sans passer par une augmentation de la mémoire requise. L'ordre du schéma temporel barotrope peut être augmenté en conservant en mémoire uniquement un champ de vitesses 3D supplémentaire (sans ajouter de mémoire supplémentaire pour les traceurs). Le champ de vitesses 3D supplémentaire permettrait de passer à un ordre supérieur tout en conservant un couplage robuste entre le mode barotrope et le mode barocline.
Les schémas d'advection ont été étudiés au niveau théorique sans prendre en compte la coordonnée verticale. Nous savons que les schémas d'advection proposés incluent implicitement de la diffusion, ceci étant nécessaire pour maintenir les propriétés de monotonie. La diffusion implicite induite par ces schémas doit cependant être étudiée de près lorsqu'elle peut s'effectuer dans des directions non isopycnales, comme c'est le cas en coordonnées σ. Plusieurs travaux de recherche sont actuellement effectués dans ce sens et pourraient être étudiés dans le cadre du modèle MARS3D. Enfin, d'importantes recherches se situent actuellement au niveau de l'étude de la mise en accord des différentes paramétrisations physiques (notamment sur la verticale) avec les schémas numériques d'un modèle donné, avec le principal objectif de modifier ces paramétrisations afin de limiter les effets de seuil.

Annexe A

Paramètres des configurations réalistes

Sommaire

A.1 Mer Iroise 163
A.2 Golfe de Gascogne 182
A.3 Méditérannée 187

Dans cet annexe, on rapelle les fichiers de paramêtres utilisés par le plus haut rang de chaque configuration. Ces paramêtres sont fournis par les fichiers : paracom1.txt, paramain.txt et paraspec.txt.

A.1 Mer Iroise

paramain.txt

```
:============================================================================
:      PARAMAIN.TXT ENREGISTREMENT DES PARAMETRES SOUS FORME DE NAMELIST
:============================================================================
:
: namelist generale. Contient les rubriques suivantes :
:
:----------------------------------------------------------------------------
: nmlmain : differents parametres generaux.
:----------------------------------------------------------------------------
:
:  dateref : date de reference  (chaine de 20 caracteres
:           JJ-Mmm-AAAA hh:mm:ss)
:
:  repbase : repertoire de base pour la simulation ./ ou ../ si rangs
:            objectif : atteindre, depuis l emplacement de l executable,
:            le repertoire $RDIR/CONF/CONF-CASE
:
:----------------------------------------------------------------------------
:
&nmlmain
   dateref = '01-Jan-1900 00:00:00'
   repbase = '../' /
:
:----------------------------------------------------------------------------
: nmlmet : parametrisation de la meteo.
:----------------------------------------------------------------------------
:
:  idrag    : type of surface drag coefficient
:              = 0 -> constant value = cds if itype=0
```

```
:              = 1 -> large and pond (1981)        (wind dependence)
:              = 2 -> smith and banke (1975)       (wind dependence)
:              = 3 -> geernaert et al. (1986)      (wind dependence)
:              = 4 -> charnock's relation (1955)   (wind dependence)
:            - not used if l_meteohom=T or l_meteostat=T
:
:  itype    : dependence on air-sea temperature difference for the surface
:             drag coefficient and and thermal exchange coefficient
:              = 0 -> no dependence on tdif
:              = 1 -> as function of tdif (uses bilinear interpolation)
:            - not used if l_meteohom=T or l_meteostat=T
:
:  cds      : surface drag coefficient (usi)
:             - used if idrag=0 and itype=0
:             - used also if l_meteohom=T or l_meteostat=T
:
:-------------------------------------------------------------------------------
&nmlmeteo
   idrag=3
   itype=0
   cds = 0.0016
   paref=101500.0
   l_rpa=.true.
   l_rvent=.true.
   l_rsat=.true.
   l_rrh=.true.
   l_rrad=.true.
   l_rir=.true.
   l_rrain=.false.
   l_rfcc=.false.
   Nom_sat='T2_SFC'    ! 2-meter Air Temperature
   Nom_pa='PRESSURE_SFC'    ! atmospherical pressure
   Nom_rh='RH2_SFC'    ! Relative humidity
   Nom_uvent='U10_SFC'    ! 10-meter U Component
   Nom_vvent='V10_SFC'    ! 10-meter V Component
   Nom_rad  ='SWDOWN_SFC'      ! solar radiation flux (short wave heat flux)
   Nom_ir   ='GLW_SFC'     ! infr-red flux (long wave heat flux)
   Nom_rain ='RAINC_SFC'     ! rain
   Nom_fcc  ='fcc' /    ! cloud cover
:
:-------------------------------------------------------------------------------
:  nambathy : parametres de bathymetrie.
:-------------------------------------------------------------------------------
:
: name_hx : nom de la variable hx dans le fichier bathymetrique
:
: name_hy : nom de la variable hy dans le fichier bathymetrique
:
: name_h0 : nom de la variable h0 dans le fichier bathymetrique
:
: name_hx : nom de la variable nmoy (niveau moyen) dans le fichier bathymetrique
:
: l_peigne : elimination des mailles fermees par trois cotes
:            (contacter V. Garnier si volonte d utiliser cette fonctionalite)
:
: l_cuvette : elimination des cuvettes (h0 < hx,hy
:            (contacter V. Garnier si volonte d utiliser cette fonctionalite)
```

```
:
: hrdef  : profondeur en deca de laquelle on reestime hx et hx comme
:          la moyenne spatiale de h0.
:
: h0fond : fond de maille en metre. ce fond de maille est ajoute
:          pour eviter l'assechement complet d'une maille et eviter
:          par exemple dans une maille de rejet la perte de matiere.
:
: dhj : hauteur minimale d'ecoulement sur les bancs decouvrants
:       exprimee m. Ce parametre est destine a controler les trop
:       fortes accelerations liees a la reduction (pratiquement a zero)
:       de la section d'ecoulement lors du decourvrement.
:
: hminfrot : hauteur minimale de la colonne d'eau utilisee pour
:            l'evaluation de la tension de frottement sur le fond et
:            l'evaluation de la tension de surface.
:
: hminkxky : hauteur minimale de la colonne d'eau utilisee pour
:            l'evaluation de la diffusion horizontale.
:
: l_petitht : si vrai alors on advecte en 2D les traceurs pour les fonds
:             inferieurs a hm
:             si faux, aucune advection pour les fonds inferieurs a hm
:
: hm       : hauteur d'eau en-deca de laquelle on ne fait plus du
:            3D mais du 2D.
:
:-------------------------------------------------------------------------------
:
&nmlbathy
   name_hx_b='HX'     ! Names of variables in bathymetric files
   name_hy_b='HY'
   name_h0_b='H0'
   name_nmoy='nmoy'
   l_peigne=.false.
   l_cuvette=.false.
   hrdef=5.0
   h0fond=0.01
   dhj=0.05
   hminfrot=0.5
   hminkxky=0.5
   l_petiteht=.true.
   hm=1.0 /
:
:-------------------------------------------------------------------------------
:
: l_repxuvwbz : logique positionne a .true. pour la reprise des champs
:             de niveaux de la surface libre, de courants barotropes et
:             des profils verticaux de courants, des vitesses verticales,
:             et enfin de la flottabilite.
:
: l_repturb : logique positionne a .true. pour la reprise des champs
:          de viscosite dans le cas de l'utilisation d'une procedure
:          de type smagorinski, et des coeficients de melange et
:          de viscosite sur la verticale.
:
: l_repsal : logique positionne a .true. pour la reprise des champs
```

```
:          de salinites.
:
: l_reptemp : logique positionne a .true. pour la reprise des champs
:          de temperatures.
:
:-------------------------------------------------------------------------------
:
&nmlreprise
   name_in_dt   = 'DT'
   name_in_xe   = 'XE'
   name_in_xeu  = 'XEU'
   name_in_xev  = 'XEV'
   name_in_u    = 'U'
   name_in_v    = 'V'
   name_in_uz   = 'UZ'
   name_in_vz   = 'VZ'
   name_in_wz   = 'WZ'
   name_in_bz   = 'BZ'
   name_in_temp = 'TEMP'
   name_in_sal  = 'SAL'
   name_in_ect  = 'ect'
   name_in_kz   = 'KZ'
   name_in_nz   = 'NZ'
   name_in_vis2d     = 'vis2d'
   name_in_vis3d_xe  = 'vish3d_xe'
   name_in_vis3d_phi = 'vish3d_phi'
   l_repxuvwbz=.true.
   l_repturb=.true.
   l_repsal=.true.
   l_reptemp=.true. /
:
:-------------------------------------------------------------------------------
: namsor : gestion des sorties .
:-------------------------------------------------------------------------------
:
: l_maxu : logique positionne a .true. pour faire la recherche du maximum
:        de courant dans le domaine et l'afficher a l ecran.
:        Type fortran logical.
:
:-------------------------------------------------------------------------------
:
&nmlsortie
   l_maxu=.true.
   nom_h0='h0'
   nom_hx='hx'
   nom_hy='hy'
   nom_u='u'
   nom_v='v'
   nom_uz='uz'
   nom_vz='vz'
   nom_temp='temp'
   nom_sal='sal'
   nom_xe='xe'
   nom_uwind='TAUX'
   nom_vwind='TAUY' /
:
:-------------------------------------------------------------------------------
```

```
:  nmladvtra
:-------------------------------------------------------------------------------
:
: pasadv : advection des traceurs calculees tous les pasadv pas de temps
:
: qmax : parametre du limiteur du schema TVD pour le calcul de l advection
:        dispersion des traceurs (i.e. c est un critere de choix entre les
:        deux schemas d advection up-stream et quick en fonction de la
:        structure du champ de traceur).
:        Remarque sur les plages de ce coefficient :
:        - qmax < 1 (sens strict) : tout est fait tout en up-stream (tres
:                  diffusif mais schema defini positif)
:        - qmax > 10.0^8  : tout est fait en quick (peu diffusif mais non
:                  defini positif)
:
:-------------------------------------------------------------------------------
:
&nmladvtra
   pasadv=1
   qmax = 8.0
   qmaxz = 10.0 /
:
:-------------------------------------------------------------------------------
:  nmlvisc
:-------------------------------------------------------------------------------
:
: l_smagor : logique positionne a .true. pour evaluer le coefficient de:
:            viscosite laterale par une procedure de type Samgorinsky.
:            Positionne a .false. pour avoir une viscosite constante et homogene
:            (exceptee dans les couches eponges). Type fortran logical.:
:
: vismin : viscosite minimale m2.s-1. En g\303\251n\303\251ral ce coefficient est choisi
:          superieur ou egal a 0.01. Type fortran real(kind=rsh).
:
: vismax : viscosite maximale m2.s-1. Ce coefficient d\303\251pend de la taille
:          de maille. Un ordre de grandeur est donne par la formule ::
:          0.015*dx**1.15 ou dx est la taille de maille du modele.
:
: cosmag : coefficient de controle de smagorinsky (sans unite).
:          la plage de variation est : 0.05 < cosmag < 0.3
:
:-------------------------------------------------------------------------------
&nmlvisc
   l_smagor=.true.
   vismin=0.1
   vismax=700.0
   cosmag=0.27 /
:
:-------------------------------------------------------------------------------
:  nmldiff
:-------------------------------------------------------------------------------
:
: kx  : coefficient de diffusion des substances dissoutes, du sel et de la
:       temperature en m2/s dans la direction W-E.
:
: ky  : coefficient de diffusion des matieres dissoutes, du sel et de la
:       temperature en m2/s dans la direction S-N.
```

```
:--------------------------------------------------------------------------------
&nmldiff
   kx = 1.0
   ky = 1.0 /
:
:--------------------------------------------------------------------------------
:  nmlturb
:--------------------------------------------------------------------------------
:
: bgdiff : viscosite et diffusion verticale de fond (background diffusivity)
:          (en m2/s). Cette valeur est telle que nz >= bgdiff
:          et kz >= bgdiff
:          Parametre du 3D.
:
: kzinit : coefficient de diffusion verticale a l initialisation.
:          Cette valeur est conserve dans le cas de modele de turbulence
:          constant (en m2/s). Parametre du 3D seulement.
:
: nzinit : coefficient de viscosite verticale a l initialisation.
:          Cette valeur est conserve dans le cas de modele de turbulence
:          constant (en m2/s). Parametre du 3D seulement.
:
: ilong : numero d option pour la formulation analytique de la longueur
:         de melange dans les modeles a 0 ou 1 equation
:         1-
:         2-
:         3-
:         4-
:         Parametre du 3D.
:
: iopt2eq : numero de l option pour le modele a deux equations
:           Parametre du 3D.
:
: l_stabilite : logique positionne a .true. pour avoir une colonne
:             d eau toujours stable (on melange la partie de la colonne
:             d eau instable jusqu a avoir la stabilite).
:             Parametre du 3D.
:
:--------------------------------------------------------------------------------
&nmlturb
   bgdiff=1.0e-6
   nzinit=1.0e-4
   kzinit=1.0e-4
   ilong=1
   iopt2eq=2
   l_stabilite=.false. /
:
:--------------------------------------------------------------------------------
:  nmlthermo
:--------------------------------------------------------------------------------
:
:  rhoref   : masse volumique de l eau de mer de reference (en kg/m3)
:
:  saliref : salinite correspondant a la masse volumique rhoref
:            Le champ de salinite est initialisee avec cette valeur.
:            (en psu)
:
```

```
:  tetaref : temperature potentielle correspondant a la masse volumique rhoref
:            Le champ de temperature est initialisee avec cette valeur.
:            (en degre C)
:
:  l_equetalin : logique positionne a .true. pour avoir une equation
:              d etat linearisee autour du point (Pression=1bar,
:              salinite=saliref,temperature=tetaref)
:
:  saliref_lin : salinite de reference utilisee dans l equation d etat
:                lineaire
:
:  tetaref_lin : temperature de reference utilisee dans l equation d etat
:                lineaire
:
:  rhoair   : masse volumique de l air en kg/m3
:
:  chp      : chaleur specifique en J/kg/K
:
:  coext    : coefficient d extinction rad(i,j)*exp(-coext*(1.0-sigw(k))*d3)
:-------------------------------------------------------------------------
&nmlthermo
   rhoref=1027.34
   saliref=35.5
   tetaref=10.0
   l_equetalin=.true.
   saliref_lin=35.5
   tetaref_lin=10.0
   rhoair=1.25
   chp=3986.0
   coext=0.1 /
:
:-------------------------------------------------------------------------
:  nmlinterp
:-------------------------------------------------------------------------
:
: perchrono : pas de temps du tableau de chronologie des rejets et des debits.
:             donnee en heure.
:
: tobs  : Estimation du critere de CFL tous les tobs (en heures)
:         Si au cours de la periode d observation tobs, le critere de stabilite
:         n a pas ete depasse, le pas de temps est augmente.
:
: l_champroche : logique positionne a .true. pour la procedure
:              de calcul de l advection dispersion dans le champ
:              proche par une methode lagrangienne.
:
:-------------------------------------------------------------------------
&nmlinterp
   perchrono=0.1
   tobs=12.0
   l_champroche=.false. /
:
:-------------------------------------------------------------------------
:  nmlfrot
:-------------------------------------------------------------------------
:
: augmfrot : logique positionne a .true. pour augmentater le frottement
```

```
:            au lancement du modele.
:            Parametre du 2D.
:
: vmxfrot : vitesse critique exprimee en m.s-1 au-dela de laquelle
:           on augmente, aux points ou cette limite est depassee,
:           artificiellement le coefficient de frottement.
:           Parametre du 2D.
:-------------------------------------------------------------------------
&nmlfrot
   l_augmfrot=.true.             ! not used yet
   vmxfrot=3.0 /
:
:-------------------------------------------------------------------------
:  nmlmvt
:-------------------------------------------------------------------------
:
: numitmax : nombre maximum d'iterations pour la convergence du processus
:            d'ajustement entre le mode interne et le mode externe.
:
: dvmax    : tolerance de l'ajustement entre le mode interne et le mode externe.
:
:-------------------------------------------------------------------------
:
&nmlmvt
   numitmax=50
   dvmax=1.0e-5 /
:
:-------------------------------------------------------------------------
:  nmlmaree  nombres d ondes dans le spectre de maree et/ou potentiel genererateur
:-------------------------------------------------------------------------
:
: nondes   : nombres d ondes dans le spectre de maree
:            nondes = 1 : maree moyenne de coefficient 70 (pure M2)
:           jusqu a 8 ondes disponibles dans l ordre :
:            M2, S2, K1, O1, N2, P1, K2, Q1.
:
: l_ipotgene : prise en compte (.true.) ou non (.false.) du potentiel generateur de la
:            maree. (.false. obligatoirement car fonctionnalite non stabilisee)
:
:-------------------------------------------------------------------------
:
&nmlmaree
   nondes = 8
   l_admittance=.false.
   datepm='02/02/2003 14:11:00'
   l_ipotgene=.false. /
:
:-------------------------------------------------------------------------
: nmlclim : condition aux limites.
:-------------------------------------------------------------------------
:
&nmlclim
   filenolnoc='./'
   l_obc_rssh=.false.
   l_obc_rt=.false.
   l_obc_rs=.false.
   l_obc_rc=.false.
```

```
   l_obc_ruv=.false.
   l_obc_ruvz=.false. /
```

paracom1.txt

```
:=============================================================================
:         PARACOM1.TXT ENREGISTREMENT DES PARAMETRES SOUS FORME DE NAMELIST
:         commun a tous les rangs
:=============================================================================
:
: namelist commune a tous les rangs. Contient les rubriques suivantes :
:-----------------------------------------------------------------
:
:   - namdate : dates de debut et de fin de la simulation. La date de debut
:               est celle a partir de laquelle on souhaite des resultats fiables
:
:   - namhead :  fichier head de l emboitement et suffixe identifiant la simulation.
:
:   - nammeteo : rubrique meteorologie.
:
:   - nammaree : spectre de la maree, type de composition harmonique,
:                potentiel generateur.
:
:   - namdecal : departs anticipes des rangs de l emboitement.
:
:-------------------------------------------------------------------------
: namdate : dates de debut et de fin de la simulation.
:-------------------------------------------------------------------------
:
: datedeb : date de debut de la simulation  (chaine de 19 caracteres
:           JJ/MM/AAAA hh:mm:ss). attention ce n est pas necessairement
:           la date de lancement de tous les modeles qui composent un
:           emboitement. La date de debut est la date a partir de laquelle
:           les resultats de la simulation seront exploitables.
:           La date de lancement est anticipee de decal(n) (voir paragraphe
:           namdecal de la namelist commune).
:
: datefin : date de fin de la simulation  (chaine de 19 caracteres
:           JJ/MM/AAAA hh:mm:ss)
:
:-------------------------------------------------------------------------
:
 &namdate
      datedeb = '03/03/2005 00:00:00'
      datefin = '10/11/2005 00:00:00' /
:
:-------------------------------------------------------------------------
:  namhead : differents parametres.
:-------------------------------------------------------------------------
:
:  filehead : nom du fichier head. Ce fichier decrit completement chaque
:             rang (ou modele) (i.e. emprise, resolution, position des
:             frontiere dans la grille precedent...) de l emboitement.
:
:  suffixe : suffixe ajoute a tous les fichiers concernes (conditions aux
:            limite, trajectoires, diagnostics, resultats...) pour pouvoir
:            tracer plus facilement l ensemble des simulations.
:
```

```
:------------------------------------------------------------------------------
:
 &namhead
      filehead = '../../entrees/head.frin'
      suffixe  = 'Iroise' /
:
:------------------------------------------------------------------------------
: nammeteo : parametrisation de la meteo.
:------------------------------------------------------------------------------
:
:  l_meteohom : variable de type fortran logical (logique)
:               positionnee a .true. si le forcage meteo est homogene (constant dans
:               l espace) et a .false. sinon.
:
:  l_meteostat : variable de type fortran logical (logique)
:              positionnee a .true. si le forcage meteo est stationnaire (constant
:              dans le temps) a .false. sinon.
:
:  dir      : direction du vent (convention meteo  : vent du Nord =  0
:                                                    vent d Est  = 90
:                                                    vent du Sud  =180
:                                                    vent d Ouest =270 )
:             cette direction est celle du vent dans le cas ou le forcage est
:             homogene et stationnaire (meteohom=.true. et meteostat=.true.).
:             Pour toutes les autres combinaisons de meteohom et meteostat,
:             dir n est pas pris en compte.
:
:  speed    : vitesse du vent en m/s pris en compte dans le cas ou le forcage est
:             homogene et stationnaire (meteohom=.true. et meteostat=.true.).
:             Pour toutes les autres combinaisons de meteohom et meteostat,
:             dir n est pas pris en compte.
:
:  filemet   : nom du fichier de donnees meteo. Ce fichier est utilise dans les
:              deux cas :
:                 1- meteostat=.false. et meteohom=.true. : les donnees d entrees
:                 sont du type donnees de semaphore.
:                 2- meteostat=.false. et meteohom=.false. : les donnees d entrees
:                 sont du type donnees issues d'analyse ou de prevision de
:                 modeles meteo.
:
:------------------------------------------------------------------------------
:
 &nammeteo
      l_meteostat = .false.,
      l_meteohom = .false.,
      speed = 0.0,
      dir = 275.0,
      filemet  = '../../entrees/post_wrfout_0311_18km_27042007.nc'/
:
:------------------------------------------------------------------------------
:  nammaree  :  spectre de maree et/ou potentiel genererateur
:------------------------------------------------------------------------------
:
: l_parcoef : parcoef=.true. permet d activer la procedure expeditive
:            de composition harmonique
:            basee sur l'onde M2 pure modulee par la fonction
:            qui donne en fonction du temps le coefficient de maree.
```

```
:            Dans ce cas le nombre d ondes dans le spectre est force a 1.
:            et l unique onde prise en compte est M2. Si parcoef=.false.
:            la composition harmonique est normale en prenant en compte le
:            spectre decrit par nondes. Type fortran logical.
:
: l_coefstat : coefstat n est pris en compte que si parcoef=.true.
:            Dans ce cas coefstat=.true. indique que l on fait des marees
:            successives fictives toutes de coefficient egal a coefmar
:            Type fortran logical.
:
: coefmar   : coefficient de maree utilise pour les marees fictives dans le
:             cas et seulement dans le cas ou parcoef=.true. et coefstat=.true.
:             Type fortran real.
:
: filecoef  : fichier contenant les coefficients de maree utilises dans la
:             procedure de composition expeditive dans le cas ou le coefficient
:             est non stationnaire. Les valeurs de coefficient sont lus et
:             utilisees seulement dans le cas parcoef=.true. et coefstat=.false.
:             Type fortran real.
:
: filectharm : fichier contenant les constantes harmoniques de maree c est a dire
:              les donnees qui permettent de construire le spectre de maree on lira
:              dans ce fichier nondes constituants de la maree.
:              Type fortran character(len=100)
:
:------------------------------------------------------------------------------
:
 &nammaree
      l_parcoef=.false.
      l_coefstat=.true.
      coefmar=0.0
      filecoef='bidon.dat'
      filectharm='../../entrees/fes2004.nc' /
```

paraspec.txt

```
:==============================================================================
:         ENREGISTREMENT DES PARAMETRES SOUS FORME DE NAMELIST
:==============================================================================
:
: namdate3dz : date du debut du 3d et date du debut du zoom Agrif.
:
: nambathy   : parametres de bathymetrie.
:
: namreprise : gestion de la reprise.
:
: namsauv    : gestion de la sauvegarde.
:
: namsortie  : gestion des sorties de resultats
:
: namvisc    : parametre de viscosite numerique horizontale
:
: namturb    : parametre de turbulence sur la verticale (3D)
:
: namsigma   : repartition des sigmas ; specifique 3D
:
: namflerej  : parametres des fleuves, des rejets et des traceurs
```

```
:
: namparanum : parametres numeriques
:
: namthermo  : parametres de theromdynamique de l eau de mer
:
: namtraj    : parametres relatifs au calcul de trajectoires
:
: namdiag    : controle des diagnostics.
:
: namclim    : type de condition aux limites en niveau.
:
:------------------------------------------------------------------------------
: namdate3dz : dates 3d et zoom
:------------------------------------------------------------------------------
:
: datedeb3d : date du debut de la simulation 3d (chaine de 19 caracteres
:             JJ/MM/AAAA hh:mm:ss). Date posterieure ou simultanee a
:             datedeb. Parametre 3D. Type fortran character(len=19).
:
: datedebagrif : date du debut du zoom AGRIF (chaine de 19 caracteres
:               JJ/MM/AAAA hh:mm:ss). Type fortran character(len=19).
:
:  decal   : decalage en jour du depart du modele par rapport a datedeb
:             pour eliminer la phase de spin-up de la fenetre
:             datedeb-datefin. Type fortran  real.
:
:------------------------------------------------------------------------------
:
 &namdate3dz
    datdeb3d = '08/03/2005 12:00:00'
    datdebagrif = '25/08/2005 00:00:00'
    decal = -1.0 /
:
:------------------------------------------------------------------------------
:  nambathy : parametres de bathymetrie.
:------------------------------------------------------------------------------
:
: filetopo : nom du fichier de topographie. Voir le format
:            de ce fichier dans la routine lfond.h pour l option fichier ascii.
:            Type fortran character(len=lchain)
:
: l_nivmoy   : logique positionne a .true. si la bathymetrie est referencee par
:            rapport au zero hydrographique et pour activer la lecture de correction
:            afin de ramener les sondes au niveau moyen. Les corrections sont
:            stockees dans le fichier filenmoy. Ces corrections ne concernent
:            a priori que les zones macrotidales. Type fortran logical.
:
: filenmoy : nom du fichier des corrections (i.e. ecarts entre le niveau moyen
:            et le zero hydrographique en metres). Voir le format
:            de ce fichier dans la routine lfond.h pour l option ascii.
:            Type fortran character(len=lchain)
:
: nblissage : nombre de boucles de lissage de la
:           bathymetrie aux endroits de forts gradients de pente.
:           Type fortran logical.
:
: xemoy : cote du niveau moyen (i.e. du niveau autour duquel oscille la mer).
```

```
:         Cela est utile pour travailler dans un
:         reseau de nivellement etabli (IGN 69, NGF ...)
:         Type fortran real(kind=rsh).
:
: hminim : hauteur en metre en deca de laquelle on considere que l on
:          est sur une maille de terre donc jamais recouverte. La
:          profondeur en ces mailles est ensuite abaissee dans la
:          subroutine lfond a -valmanq. Type fortran real(kind=rsh).
:
:-------------------------------------------------------------------------------
:
 &nambathy
    filetopo='../../entrees/hxhy.frin1_mod'
    l_nivmoy=.true.
    filenmoy='../../entrees/nmoy.frin1'
    nblissage=0
    xemoy=0.0
    hminim=-5.999 /
:
:-------------------------------------------------------------------------------
:  namreprise : gestion de la reprise d une simulation interrompue
:-------------------------------------------------------------------------------
:
: reprise : logique positionne a .true. en cas de reprise. La simulation
:           sera initialisee a l aide de l'etat du modele qui a ete
:           sauvegarde au cours d une simulation precedente dans le fichier
:           filerep. Type fortran logical.
:           Type fortran logical.
:
: filerep  : nom du fichier dans lequel a ete sauve l etat du modele a partir
:            duquel on souhaite totalement ou partiellement (voir les parametres
:            suivants) demarrer la simulation. Ce fichier est au format
:            netcdf. Type fortran character(len=lchain).
:
:-------------------------------------------------------------------------------
:
 &namreprise
      l_reprise = .false.
      filerep = 'save.nc' /
:
:-------------------------------------------------------------------------------
:  namsauv : gestion des Sauvegardes.
:-------------------------------------------------------------------------------
:
: l_sauvg : logique positionne a .true. pour sauver a intervalles reguliers (longs
:          de pasauv) l etat du modele dans un fichier de sauvegarde, destine ensuite
:          a la reprise. Type fortran logical.
:
: filesauv : nom du fichier dans lequel est sauvee la situation du modele
:            lorsque l on ne demande pas la sauvegarde sequentielle
:            (i.e. sauvseq=.false.). Type fortran character(len=lchain).
:
: l_sauvseq : logique positionne a .true. pour effectuer une procedure de sauvegarde
:          sequentielle : procedure au cours de laquelle on cree differents fichiers
:          de sauvegarde dont le nom contient la date (jjmmaaaahhmm). A contrario
:          sauvseq=.false. inhibe cette sauvegarde sequentielle et les sauvegardes
:          sont effectuees toujours dans le meme fichier filesauv.
```

```
:          Type fortran logical.
:
: pasauv : intervalle de temps entre deux sauvegardes.
:          les sauvergardes sont effectuees dans le fichier au format netcdf
:          intitule filesauv. Cet intervalle de temps est compte
:          en jour. Type fortran real(kind=rsh)
:
:------------------------------------------------------------------------------
:
 &namsauv
      l_sauvg = .true.
      l_sauvseq = .false.
      filesauv= 'save.nc'
      pasauv = 30.0d0 /
:

:------------------------------------------------------------------------------
: namsortie : gestion des sorties de resultats
:------------------------------------------------------------------------------
:
: iecran : 6 : affichage ecran; 12 : affichage dans le fichier listing
:
: iecranlog : 6 : affichage ecran; 18 : affichage dans le fichier simu.log
:
: fileoutput : nom du fichier definissant les types de fichiers resultats.
:
:------------------------------------------------------------------------------
:
 &namsortie
    iecran=6
    iecranlog=18
    fileoutput= './output.dat' /
:
:------------------------------------------------------------------------------
:  namvisc
:------------------------------------------------------------------------------
:
: fvisc  : coefficient dans la formulation de la viscosite
:          turbulente horizontale nu = fvisc(i)*0.01*(dx**1.15). La
:          plage de variation de fvisc est : 1 < fvisc < 17
:
: leponge : longueur en nombre de mailles de la couche eponge.
:
: vismul : coefficient multiplicateur de la viscosite a l'interieur de la couche
:          eponge. Type fortran real(kind=rsh).
:
: l_epongs : logique positionne a .true. pour mettre une couche eponge au sud.
:          Type fortran logical.
:
: l_epongn : logique positionne a .true. pour mettre une couche eponge au nord.
:          Type fortran logical.
:
: l_eponge : logique positionne a .true. pour mettre une couche eponge a l'est.
:          Type fortran logical.
:
: l_epongw : logique positionne a .true. pour mettre une couche eponge a l'ouest.
:          Type fortran logical.
```

```
:
:-------------------------------------------------------------------------
:
 &namvisc
    fvisc=5.0
    leponge=5
    vismul=1.0
    l_epongs=.false.
    l_epongn=.false.
    l_eponge=.false.
    l_epongw=.false.  /
:
:-------------------------------------------------------------------------
:  namturb
:-------------------------------------------------------------------------
:
: z0fd : longueur de rugosite pour l estimation du coeffcient de trainee
:        sur le fond (en m). plage de variation autour de quelques millimetres.
:        Parametre du 3D.
:
: l_strikhom : caractere homogene du coefficient de Strikler ou non
:            Type fortran logical
:            Parametre du 2D.
:
: strikler : coefficient de Strickler intervenant dans  la
:            parametrisation du frottement de fond a partir du
:            courant moyen. La plage de variation du strikler est :
:            20 < strikler < 50. Attention : plus on diminue ce
:            coefficient plus on augmente le frottement. Ce parametre
:            n est utilise que dans la partie 2D qui demarre le modele.
:            Parametre du 2D.
:
: filestrik : nom du fichier de modification du coefficien de strikler
:            Parametre du 2D.
:
: nbeqturb : nombre d equations du modele de turbulence (0, 1 ou 2)
:            Parametre du 3D.
:
: iopt0eq : numero de l option pour le modele a zero equation
:           1- coefficients verticaux de viscosite et de diffusion constant
:           2- modele de Prandt (longueur de melange + cisaillement)
:           3- modele de Quetin (longueur de melange + Richardson)
:           4- modele de Pacanovski et Philander (Richardson)
:           Parametre du 3D.
:
:-------------------------------------------------------------------------
:
 &namturb
    z0fd=0.0035
    l_strikhom = .true.
    strikler=35.0
    filestrik = 'dist.strk'
    nbeqturb =1
    iopt0eq =2 /
:
:-------------------------------------------------------------------------
:  namsigma : repartition des sigmas ; specifique 3D
```

```
:------------------------------------------------------------------------------
:
: l_equisig : equisig=.true. donne une equirepartition des niveaux sigma.
:             equisig=.false. desactive l'equirepartition des sigmas et oblige
:             l'utilisateur a donner la repartition des niveaux ci-dessous.
:             attention ! le nombre de sigmas que l 'on donne ci-dessous
:             doit corrrespondre exactement a kmax du fichier inc/parameter.h
:             Parametre du 3D. Type fortran logical
:
: sig      : niveaux sigma. Attention ! a modifier en cas de modification
:             du parametre kmax du fichier inc/parameter.h
:             A renseigner meme si equisig=.false.
:             Type fortran real(kind=rsh),dimension(kmax)
:
:    sig(1)= 0.05,sig(2)= 0.2,sig(3)= 0.35,sig(4)= 0.5,
:    sig(5)= 0.65,sig(6)= 0.75,sig(7)= 0.85,sig(8)= 0.9,
:    sig(9)= 0.95,sig(10)= 0.97
:
:    l_cartesien : si .true., mailles cartesiennes
:
:------------------------------------------------------------------------------
:
 &namsigma
     l_equisig=.false.
     sig(1)= 2.2500001E-02,sig(2)= 6.4999998E-02,sig(3)= 0.105,sig(4)=0.1475,
     sig(5)= 0.1925,sig(6)= 0.2375,sig(7)= 0.2825,sig(8)= 0.3275,
     sig(9)= 0.3725,sig(10)= 0.4175,sig(11)= 0.4625,sig(12)= 0.5075,
     sig(13)= 0.5525,sig(14)= 0.5975,sig(15)= 0.6425,sig(16)= 0.6875,
     sig(17)= 0.7325,sig(18)= 0.775,sig(19)= 0.815,sig(20)= 0.8525,
     sig(21)= 0.8865,sig(22)= 0.9165,sig(23)= 0.940,sig(24)= 0.9575,
     sig(25)= 0.970,sig(26)= 0.980,sig(27)= 0.989,sig(28)= 0.995,
     sig(29)= 0.998,sig(30)= 0.9995
     l_cartesien=.false. /
:
:------------------------------------------------------------------------------
: namriv : parametres concernant les fleuves.
:------------------------------------------------------------------------------
:
: filefleuv : fichier decrivant les apports d eau douce (positions, debit...)
:              dont le nombre a ete donne precedemment.
:              Type fortran character(len=lchain)
:
: icon     : prise en compte ou non des effets de flottabilite
:             - 0 : pas de calcul de salinite ni de temperature
:                   mais la structure en T et S est utilisee pour
:                   calculer la turbulence.
:             - 1 : calcul de temperature et de salinite mais pas prise
:                   en compte du gradient de pression interne. idem 0
:                   pour calcul de la turbulence
:             - 2 : calcul de temperature et de salinite et prise
:                   en compte du gradient de pression interne
:             Type fortran integer.
:
:------------------------------------------------------------------------------
:
 &namriv
     filefleuv = '../../entrees/.dat'
```

```
     icon = 2 /
:
:-------------------------------------------------------------------------------
:  namparanum
:-------------------------------------------------------------------------------
:
:  dtini  :  pas de temps initial (dans le cas de regulation du pas
:            de temps) sinon pas de temps du modele (pas de temps fixe)
:            en seconde. Il est raisonnable que ce pas de temps soit tel que :
:            u*dtini/dx ~ 0.2 avec u le courant max rencontre sur la
:            zone et dx la taille de maille.
:            Type fortran real(kind=rlg)
:
:  dtmin  :  pas de temps minimal en-dessous duquel on ne descendra pas
:            dans la procedure de regulation du pas de temps en seconde.
:            Type fortran real(kind=rlg)
:
:  dtmax  :  pas de temps maximal autorise dans la procedure de
:            regulation du pas de temps en seconde. Ce pas de temps
:            doit etre tel que : u*dtmax/dx < 1 avec u le courant max
:            rencontre sur la zone et dx la taille de maille
:            Type fortran real(kind=rlg)
:
: cflcrt  : nombre de courant maximum autorise dans la procedure de
:           pas de temps adaptatif. En theorie
:           ce nombre vaut 1. En pratique le modele est destabilise
:           des que cflcrt > 0.7. Si ce seuil est franchit le pas de temps
:           est reduit.
:
: l_filtrage : .true. si filtrage d asselin du niveau de la surface
:
: asselin   : poids fort du filtre d'asselin utilise dans la procedure
:             de filtrage du gradient barotrope de pression.
:             Ce poids est tel que 0.5 <= asselin < 1 si l_filtrage=.true.
:
: predicor : logique positionne a .true. pour  utiliser la procedure
:            de prediction-correction dans le calcul de l hydrodynamique du 2D
:            Parametre du 2D. Type fortran logical.
:
:-------------------------------------------------------------------------------
:
 &namparanum
     dtini=200.d0
     dtmin=30.d0
     dtmax=600.d0
     l_modele2d=.false.
     cflcrt=0.6
     l_filtrage=.true.
     asselin=0.8
     l_predicor=.true. /
:
:-------------------------------------------------------------------------------
:  namthermo
:-------------------------------------------------------------------------------
:
:  l_pertefond : logique positionne a .true. pour que le fond
:              ne soit pas une barriere thermique ; ainsi la partie
```

```
:              radiative non encore absorbee dans la colonne d eau est
:              perdue. Type fortran logical.
:
:  l_chaleurcte : representation schematique des flux de chaleur air-mer
:               fixes a une constante egale a radcte. Type fortran logical.
:
:  radcte   : flux de chaleur echange a l interface air-mer en
:             cas d echanges schematiques constants (en W/m2).
:             Type fortran real(kind=rsh)
:
:-------------------------------------------------------------------------------
:
 &namthermo
     l_pertefond=.true.
     l_chaleurcte=.false.
     radcte=0.0 /
:
:-------------------------------------------------------------------------------
:  namtraj
:-------------------------------------------------------------------------------
:
: filetrajin : nom du fichier decrivant la position des taches et leur
:              caracteristique
:
:-------------------------------------------------------------------------------
:
 &namtraj
     filetrajin='tache.dat' /
:
:-------------------------------------------------------------------------------
: namdiag : controle des diagnostics.
:-------------------------------------------------------------------------------
:
: l_diag : logique a positionner a true pour la realisation des diagnostics
:        implementes dans la surbroutine diagnostic.F
:        Type fortran logical.
:
: datedebdiag : date du debut des diagnostics (chaine de 19 caracteres
:               JJ/MM/AAAA hh:mm:ss) Type fortran character(len=19).
:
: datefindiag : date de fin des diagnostics (chaine de 19 caracteres
:               JJ/MM/AAAA hh:mm:ss) Type fortran character(len=19).
:
: filediag : nom du fichier texte destine a recevoir les series chrono
:            Type fortran character(len=lchain).
:
: l_points : logique a positionner a true pour le suivi de points particuliers
:
: filepoints : nom du fichier texte contenant la description
:              d un ensemble de points en lesquels on va sortir les
:              courants, niveau,salinite, temperature traceur a tous les
:              pas de temps. Type fortran character(len=lchain).
:
:-------------------------------------------------------------------------------
:
 &namdiag
   l_diag=.false.
```

```
   datdebdiag = '01/01/1996 00:00:00'
   datfindiag = '02/01/2001 18:00:01'
   filediag='diag.gdg51'
   l_points=.false.
   filepoints='points.dat' /
:
:-------------------------------------------------------------------------------
: namclim : type de condition aux limites en vitesse.
:-------------------------------------------------------------------------------
:
: l_perio_x : si .true. conditions aux limites periodiques selon l axe des x
:
: l_perio_y : si .true. conditions aux limites periodiques selon l axe des y
:
: l_composition : positionne a .true. pour imposer aux limites une composition
:               harmonique de maree pour le forcage en niveau. Pratique pour
:               faire des modeles de detail qui sont habituellement emboiter
:               et que l on peut "desemboiter" ainsi simplement.
:               Type fortran logical.
:
: l_clsv : logique positionne a .true. pour ecrire des conditions aux limites
:        pour un rang suivant. Type fortran logical.
:
: l_changficl : positionne a .true. pour prendre aux limites un autre
:             fichier de conditions aux limites que celui construit par
:             defaut a l aide du numero du rang et du suffixe. Le nom du fichier
:             que l on souhaite est alors donne dans filecl
:             Type fortran logical.
:
: filecl   : nom du fichier de conditions aux limites dans le cas ou l on a fixe
:            changficl=.true. . Type fortran character(len=lchain)
:
: changficlsv : positionne a .true. pour ecrire les conditions aux limites dans
:               un autre fichier de conditions aux limites que celui construit par
:               defaut a l aide du numero du rang et du suffixe. Le nom du fichier
:               que l on souhaite est alors donne dans fileclsv
:               Type fortran logical.
:
: fileclsv : nom du fichier de conditions aux limites pour le rang suivant dans le
:            cas ou l on a fixe changficlsv=.true.
:            Type fortran character(len=lchain).
:
: l_obc_south : logique positionne a .true. si presence de frontiere ouverte au sud.
:          Type fortran logical.
:
: file_obc_s  : name of file for southern open boundary conditions
:
: l_obc_north : logique positionne a .true. si presence de frontiere ouverte au nord.
:          Type fortran logical.
:
: file_obc_n  : name of file for northern open boundary conditions
:
: l_obc_east : logique positionne a .true. si presence de frontiere ouverte a l est.
:          Type fortran logical.
:
: file_obc_e  : name of file for eastern open boundary conditions
:
```

```
: l_obc_west : logique positionne a .true. si presence de frontiere ouverte a l ouest.
:          Type fortran logical.
:
: file_obc_w  : name of file for western open boundary conditions
:
: l_obc_relax : relaxation vers T et S "parent" a frontiere ouverte
:
: obc_coefrel : coefficient de relaxation en m/s/C ou m/s/psu
:-------------------------------------------------------------------------------
:
 &namclim
    l_perio_x=.false.
    l_perio_y=.false.
    l_composition=.false.
    l_clsv=.true.
    l_changficl=.true.
    filecl='./clrg2_wrf20km.sv'
    l_changficlsv=.false.
    fileclsv='./clrg2.sv'
    l_obc_south=.true.
    file_obc_s='./'
    l_obc_north=.true.
    file_obc_n='./'
    l_obc_west=.true.
    file_obc_w='./'
    l_obc_east=.true.
    file_obc_e='./'
    l_obc_relax=.false.
    obc_coefrel=0.7e-05 /
```

A.2 Golfe de Gascogne

Ici on ne reprendra que les valeurs des variables.
paramain.txt

```
&nmlmain
   dateref = '01-Jan-1900 00:00:00'
   repbase = '../' /

&nmlmeteo
   idrag=0
   itype=0
   cds = 0.0016
   paref=101500.0
   l_rpa=.true.
   l_rvent=.true.
   l_rsat=.true.
   l_rrh=.true.
   l_rrad=.false.
   l_rir=.false.
   l_rrain=.false.
   l_rfcc=.true.
   Nom_sat='t2'    ! 2-meter Air Temperature
   Nom_pa='msl'    ! atmospherical pressure
   Nom_rh='Rh'    ! Relative humidity
   Nom_uvent='u10'    ! 10-meter U Component
```

```
   Nom_vvent='v10'    ! 10-meter V Component
   Nom_rad  ='rad'      ! solar radiation flux (short wave heat flux)
   Nom_ir   ='hflw'     ! infr-red flux (long wave heat flux)
   Nom_rain ='rain'     ! rain
   Nom_fcc  ='tcc' /    ! cloud cover

&nmlbathy
   name_hx_b='HX'     ! Names of variables in bathymetric files
   name_hy_b='HY'
   name_h0_b='H0'
   name_nmoy='nmoy'
   l_peigne=.false.
   l_cuvette=.false.
   hrdef=5.0
   h0fond=0.01
   dhj=0.05
   hminfrot=0.5
   hminkxky=0.5
   l_petiteht=.false.
   hm=1.0 /

&nmlreprise
   name_in_dt   = 'DT'
   name_in_xe   = 'XE'
   name_in_xeu  = 'XEU'
   name_in_xev  = 'XEV'
   name_in_u    = 'U'
   name_in_v    = 'V'
   name_in_uz   = 'UZ'
   name_in_vz   = 'VZ'
   name_in_wz   = 'WZ'
   name_in_bz   = 'BZ'
   name_in_temp = 'TEMP'
   name_in_sal  = 'SAL'
   name_in_ect  = 'ect'
   name_in_kz   = 'KZ'
   name_in_nz   = 'NZ'
   name_in_vis2d     = 'vis2d'
   name_in_vis3d_xe  = 'vish3d_xe'
   name_in_vis3d_phi = 'vish3d_phi'
   l_repxuvwbz=.true.
   l_repturb=.true.
   l_repsal=.true.
   l_reptemp=.true./

&nmlsortie
   l_maxu=.true.
   nom_h0='H0'
   nom_hx='hx'
   nom_hy='hy'
   nom_u='u'
   nom_v='v'
   nom_uz='uz'
   nom_vz='vz'
   nom_temp='temp'
   nom_sal='sal'
   nom_xe='xe'
```

```
   nom_uwind='TAUX'
   nom_vwind='TAUY' /

&nmladvtra
   pasadv=1
   qmax = 8.0
   qmaxz = 10.0 /

&nmlvisc
   l_smagor=.false.
   vismin=0.1
   vismax=700.0
   cosmag=0.27 /

&nmldiff
   kx = 1.0
   ky = 1.0 /

&nmlturb
   bgdiff=1.0e-6
   nzinit=1.0e-4
   kzinit=1.0e-4
   ilong=1
   iopt2eq=2
   l_stabilite=.false. /

&nmlthermo
   rhoref=1027.34
   saliref=35.6
   tetaref=12.0
   l_equetalin=.true.
   saliref_lin=35.6
   tetaref_lin=12.0
   rhoair=1.25
   chp=3986.0
   coext=0.1 /

&nmlinterp
   perchrono=0.1
   tobs=12.0
   l_champroche=.false. /

&nmlfrot
   l_augmfrot=.true.             ! not used yet
   vmxfrot=3.0 /

&nmlmvt
   numitmax=50
   dvmax=1.0e-5 /

&nmlmaree
   nondes = 8
   l_admittance=.false.
   datepm='02/02/2003 14:11:00'
   l_ipotgene=.false. /

&nmlclim
```

```
   filenolnoc='./'
   l_obc_rssh=.false.
   l_obc_rt=.true.
   l_obc_rs=.true.
   l_obc_rc=.false.
   l_obc_ruv=.false.
   l_obc_ruvz=.false. /
```

paracom1.txt

```
&namdate
      datedeb = '01/01/2005 00:00:00'
      datefin = '31/10/2005 00:00:00' /

&namhead
      filehead = '../../entrees/head.GDGE',
      suffixe  = 'GDGE' /

&nammeteo
      l_meteostat = .false.,
      l_meteohom = .false.,
      speed = 0.0,
      dir = 275.0,
      filemet  = '../../entrees/ARP_00-05.nc' /

&nammaree
      l_parcoef=.false.
      l_coefstat=.true.
      coefmar=0.0
      filecoef='bidon.dat'
      filectharm='../../entrees/fes2004.nc' /
```

paraspec.txt

```
&namdate3dz
    datdeb3d = '01/01/2005 00:00:00'
    datdebagrif = '25/01/1998 11:12:00'
    decal = -1.0 /

&nambathy
    filetopo='../../entrees/hxhy.GDGE1'
    l_nivmoy=.true.
    filenmoy='../../entrees/nmoy.GDGE1'
    nblissage=16,
    proflissage=100,
    jlissage=133,
    xemoy=0.0,
    hminim=-9.9 /

&namreprise
      l_reprise = .false.
      filerep = 'save.nc'

&namsauv
      l_sauvg = .false.
      l_sauvseq = .true.
      filesauv= 'save.nc'
      pasauv = 10.0d0 /
```

```
&namsortie
    iecran=12
    iecranlog=18
    fileoutput= './output.dat' /

&namvisc
    fvisc=5.0
    leponge=5
    vismul=3.0
    l_epongs=.false.
    l_epongn=.true.
    l_eponge=.true.
    l_epongw=.true. /

&namturb
    z0fd=0.0035
    l_strikhom = .true.
    strikler=35.0
    filestrik = 'dist.strk'
    nbeqturb =1
    iopt0eq =2 /

&namsigma
     l_equisig=.false.,
     sig(1)= 0.022500001,sig(2)= 0.064999998,sig(3)= 0.105,sig(4)= 0.1475,
     sig(5)= 0.1925,sig(6)= 0.2375,sig(7)= 0.2825,sig(8)= 0.3275,
     sig(9)= 0.3725,sig(10)= 0.4175,sig(11)=0.4625,sig(12)= 0.5075,
     sig(13)= 0.5525,sig(14)= 0.5975,sig(15)= 0.6425,sig(16)= 0.6875,
     sig(17)= 0.7325,sig(18)= 0.775,sig(19)= 0.815,sig(20)= 0.8525,
     sig(21)=0.8865,sig(22)= 0.9165,sig(23)= 0.940,sig(24)= 0.9575,
     sig(25)= 0.970,sig(26)= 0.980,sig(27)= 0.989,sig(28)= 0.995,
     sig(29)= 0.998,sig(30)= 0.9995,
     l_cartesien=.false. /

&namriv
     filefleuv = '../../entrees/fleuves/fleuves_gdg4.dat'
     icon = 2 /

&namparanum
     dtini=300.d0
     dtmin=300.d0
     dtmax=300.d0
     l_modele2d=.false.
     cflcrt=0.6
     l_filtrage=.false.
     asselin=0.9
     l_predicor=.true. /

&namthermo
     l_pertefond=.false.
     l_chaleurcte=.false.
     radcte=0.0 /

&namtraj
     filetrajin='tache.dat' /
```

```
&namdiag
   l_diag=.false.
   datdebdiag = '01/01/1996 00:00:00'
   datfindiag = '02/01/2001 18:00:01'
   filediag='diag.gdg51'
   l_points=.false.
   filepoints='points.dat' /

&namclim
    l_perio_x=.false.
    l_perio_y=.false.
    l_composition=.false.
    l_clsv=.true.
    l_changficl=.false.
    filecl='../rank_0/clrg1.sv'
    l_changficlsv=.false.
    fileclsv='./clrg2.sv'
    l_obc_south=.false.
    file_obc_s='./'
    l_obc_north=.true.
    file_obc_n='../../entrees/climatoTS_north_1996_2005_gdge4_30sig.nc'
    l_obc_west=.true.
    file_obc_w='../../entrees/climatoTS_west_1996_2005_gdge4_30sig.nc'
    l_obc_east=.true.
    file_obc_e='../../entrees/climatoTS_east_1996_2005_gdge4_30sig.nc'
    l_file_init=.true.
    file_init='../../entrees/init_20050101.nc'
    l_obc_relax=.false.
    obc_coefrel=0.7e-05 /
```

A.3 Méditérannée

Paramain.txt

```
&nmlmain
   dateref = '01-Jan-1900 00:00:00'
   repbase = './' /

&nmlmeteo
   idrag=0
   itype=1
   cds=0.0012
   paref=101500.0
   l_rpa=.false.
   l_rvent=.true.
   l_rsat=.true.
   l_rrh=.true.
   l_rrad=.true.
   l_rir=.true.
   l_rrain=.true.
   l_rfcc=.false.
   Nom_sat='sat'        ! 2-meter Air Temperature
   Nom_pa='pression'    ! atmospherical pressure
   Nom_rh='rh'          ! Relative humidity
   Nom_uvent='uwd'      ! 10-meter U Component
   Nom_vvent='vwd'      ! 10-meter V Component
   Nom_rad  ='rad'      ! solar radiation flux (short wave heat flux)
```

```
   Nom_ir   ='hflw'     ! infr-red flux (long wave heat flux)
   Nom_rain ='rain'     ! rain
   Nom_fcc  ='fcc' /    ! cloud cover

&nmlbathy
   name_hx_b='HX'     ! Names of variables in bathymetric files
   name_hy_b='HY'
   name_h0_b='H0'
   name_nmoy='nmoy'
   l_peigne=.false.
   l_cuvette=.false.
   hrdef=5.0
   h0fond=0.01
   dhj=0.0
   hminfrot=0.5
   hminkxky=0.5
   l_petiteht=.false.
   hm=1.0 /

&nmlreprise
   name_in_dt   = 'DT'
   name_in_xe   = 'XE'
   name_in_xeu  = 'XEU'
   name_in_xev  = 'XEV'
   name_in_u    = 'U'
   name_in_v    = 'V'
   name_in_uz   = 'UZ'
   name_in_vz   = 'VZ'
   name_in_wz   = 'WZ'
   name_in_bz   = 'BZ'
   name_in_temp = 'TEMP'
   name_in_sal  = 'SAL'
   name_in_ect  = 'ect'
   name_in_kz   = 'KZ'
   name_in_nz   = 'NZ'
   name_in_vis2d     = 'vis2d'
   name_in_vis3d_xe  = 'vish3d_xe'
   name_in_vis3d_phi = 'vish3d_phi'
   l_repxuvwbz=.true.
   l_repturb=.false.
   l_repsal=.true.
   l_reptemp=.true. /

&nmlsortie
   l_maxu=.true.
   nom_h0='H0'
   nom_hx='HX'
   nom_hy='HY'
   nom_u='U'
   nom_v='V'
   nom_uz='UZ'
   nom_vz='VZ'
   nom_temp='TEMP'
   nom_sal='SAL'
   nom_xe='XE'
   nom_uwind='TAUX'
   nom_vwind='TAUY' /
```

```
&nmladvtra
   pasadv=1
   qmax = 12.0
   qmaxz = 10.0 /

&nmlvisc
   l_smagor=.true.
   vismin=2.
   vismax=200.0
   cosmag=0.25 /

&nmldiff
   kx = 1.0
   ky = 1.0 /

&nmlturb
   bgdiff=1.0e-5
   nzinit=1.0e-3
   kzinit=3.0e-5
   ilong=1
   iopt2eq=2
   l_stabilite=.false. /

&nmlthermo
   rhoref=1000.
   saliref=35.5
   tetaref=10.0
   l_equetalin=.false.
   saliref_lin=35.
   tetaref_lin=10.0
   rhoair=1.293
   chp=4000.0
   coext=0.1 /

&nmlinterp
   perchrono=0.1
   tobs=12.0
   l_champroche=.false. /

&nmlfrot
   l_augmfrot=.true.             ! not used yet
   vmxfrot=5.0 /

&nmlmvt
   numitmax=50
   dvmax=1.0e-5 /

&nmlmaree
   nondes = 8
   l_admittance=.false.
   datepm='02/02/2003 14:11:00'
   l_ipotgene=.false. /

&nmlclim
   filenolnoc='./'
   l_obc_rssh=.true.
```

```
   l_obc_rt=.true.
   l_obc_rs=.true.
   l_obc_rc=.false.
   l_obc_ruv=.false.
   l_obc_ruvz=.true. /
```

Paracom1.txt

```
&namdate
      datedeb = '09/04/2005 00:00:00'
      datefin = '29/07/2005 00:00:00' /

&namhead
      filehead = '../entrees/head.GOL'
      suffixe  = 'GOL' /

&nammeteo
      l_meteostat = .false.
      l_meteohom = .false.
      speed =15.0
      dir =   0.0
      filemet  = '../entrees/MM5_mamjj05_gol.nc' /

&nammaree
      l_parcoef=.false.
      l_coefstat=.true.
      coefmar=0.0
      filecoef='bidon.dat'
      filectharm='../../entrees/fes2004.nc' /
```

Paraspec.txt

```
&namdate3dz
    datdeb3d = '01/05/2001 00:00:00'
    datdebagrif = '25/01/1998 11:12:00'
    decal = 0.0 /

&nambathy
    filetopo='../entrees/bathy_GOL.nc'
    l_nivmoy=.false.
    filenmoy='../../entrees/nmoy.MENOR'
    nblissage=0
    xemoy=0.0
    hminim=0. /

&namreprise
      l_reprise = .true.
      filerep = '../entrees/gol_init_2005040900.nc' /

&namsauv
      l_sauvg = .false.
      l_sauvseq = .true.
      filesauv= 'save.nc'
      pasauv = 10.0d0 /

&namsortie
```

```
    iecran=12
    iecranlog=18
    fileoutput= './output.dat' /

&namvisc
    fvisc=4.0
    leponge=40
    vismul=1.0
    l_epongs=.true.
    l_epongn=.false.
    l_eponge=.true.
    l_epongw=.false. /

&namturb
    z0fd=0.0035
    l_strikhom = .true.
    strikler=40.0
    filestrik = 'dist.strk'
    nbeqturb =0
    iopt0eq =4 /

&namsigma
     l_equisig=.false.
     sig(1)= 2.2500001E-02,sig(2)= 6.4999998E-02,sig(3)= 0.105,sig(4)= 0.1475,
     sig(5)= 0.1925,sig(6)= 0.2375,sig(7)= 0.2825,sig(8)= 0.3275,
     sig(9)= 0.3725,sig(10)= 0.4175,sig(11)= 0.4625,sig(12)= 0.5075,
     sig(13)= 0.5525,sig(14)= 0.5975,sig(15)= 0.6425, sig(16)= 0.6875,
     sig(17)= 0.7325, sig(18)= 0.775,sig(19)= 0.815, sig(20)= 0.8525,
     sig(21)= 0.8865,sig(22)= 0.9165,sig(23)= 0.940, sig(24)= 0.9575,
     sig(25)= 0.970,sig(26)= 0.980,sig(27)= 0.989,sig(28)= 0.995,
     sig(29)= 0.998,sig(30)= 0.9995
     l_cartesien=.false. /

&namriv
     filefleuv = '../entrees/fleuve.dat'
     icon = 2 /

&namparanum
     dtini=150.d0
     dtmin=150.d0
     dtmax=150.d0
     l_modele2d=.false.
     cflcrt=0.6
     l_filtrage=.false.
     asselin=0.1
     l_predicor=.false. /

&namthermo
     l_pertefond=.false.
     l_chaleurcte=.false.
     radcte=0.0 /

&namtraj
     filetrajin='tache.dat' /

&namdiag
   l_diag=.false.
```

```
   datdebdiag = '09/04/2005 00:02:00'
   datfindiag = '29/07/2005 00:00:00'
   filediag='diag.gdg51'
   l_points=.false.
   filepoints='./points.dat' /

&namclim
    l_perio_x=.false.
    l_perio_y=.false.
    l_composition=.false.
    l_clsv=.false.
    l_changficl=.true.
    filecl='./'
    l_changficlsv=.false.
    fileclsv='../entrees/clrg2.sv'
    l_obc_south=.true.
    file_obc_s='../entrees/obc_amjj05_gol_sud.nc'
    l_obc_north=.false.
    file_obc_n='./'
    l_obc_west=.false.
    file_obc_w='./'
    l_obc_east=.true.
    file_obc_e='../entrees/obc_amjj05_gol_est.nc'
    l_obc_relax=.true.
    obc_coefrel=0.7e-05 /
```

Annexe B

Paramètres de simulation des cas tests

Sommaire

B.1 Vortex Barocline 193
B.2 Vortex Barotrope 194
B.3 Jet barotrope 194
B.4 Test Smolarkiewicz 195

B.1 Vortex Barocline

Dans le fichier Vortex.F90
- Paramètres physiques de la simulation ;
  - $H_0 = 5000.$ m ;
  - $H_1 = 2500.$ m ;
  - $\rho_{ref} = \rho_0 = 1024.4$ kg.m^{-3} ;
  - $P_0 = \pm 9127.4$ le signe définissant un vortex anti-cyclonique ou cyconique ;
  - $Saliref = 31$ g.l^{-1}(rmq : ici la salinité n'a aucune importance) ;
  - $Tetaref = 10$ degré C ;
  - $\sigma = 60$ km ;
  - $N = 0,003$ s^{-1} ;
  - nzinit=1.3e-5 ;
  - kzinit=0.0000001 ;
  - vish_xe=1. ;
  - vish_phi=1. ;
  - vismin= 0.1 ;
  - vismax= 100. ;
  - kx=75. ;
  - ky=75. ;
  - qmax=12.0 ;
  - qmaxz=10.0.
- Paramètres nurméiques de la simulation.
  - $dt = 960$ s ;
  - $dx = dy = 10000.$;
  - l_filtrage=.false. ;
  - l_equetalin=.true. ;
  - pasor= 12*3600 ;
  - vmxfrot=1.0 ;
  - icon=2 ;
  - utilise des frontières ouvertes sans couche éponge :
    - fvisc=5.0 ;
    - leponge=5 ;
    - vismul=5.0 ;

- l_epongs=.false. ;
- l_epongn=.false. ;
- l_eponge=.false. ;
- l_epongw=.false. .

B.2 Vortex Barotrope

Dans le fichier Vbar.F90
- Paramètres physiques de la simulation ;
  - $H_0 = 5000.$ m ;
  - $H_1 = 2500.$ m ;
  - $\rho_{ref} = \rho_0 = 1024.4$ kg.m^{-3} ;
  - $P_0 = \pm 9127.4$ le signe définissant un vortex anti-cyclonique ou cyconique ;
  - $Saliref = 31$ g.l^{-1}(rmq : ici la salinité n'a aucune importance) ;
  - $Tetaref = 10$ degré C ;
  - $\sigma = 60$ km ;
  - $N = 0,003$ s^{-1} ;
  - nzinit=1.3e-5 ;
  - kzinit=0.0000001 ;
  - vish_xe=0. ;
  - vish_phi=0. ;
  - vismin= 0.1 ;
  - vismax= 100. ;
  - kx=75. ;
  - ky=75. ;
  - qmax=12.0 ;
  - qmaxz=10.0.
- Paramètres nurméiques de la simulation.
  - $dt = 800$ s ;
  - $dx = dy = 10000.$;
  - l_filtrage=.false. ;
  - l_equetalin=.true. ;
  - l_predicor=.true. ;
  - pasor= 12*3600 ;
  - vmxfrot=1.0 ;
  - icon=2 ;

B.3 Jet barotrope

Dans le fichier JETBT.F90
- Paramètres physiques de la simulation ;
  - $H_0 = 5000.$ m ;
  - $fvisc = 1.$;
  - $\rho_{ref} = \rho_0 = 1000.$ kg.m^{-3} ;
  - $Tetaref = 10$ degré C ;
  - $Saliref = 31.$ psu ;
  - nzinit=0.0 ;
  - kzinit=0.0 ;
  - vish_xe=100. ;
  - vish_phi=100. ;
  - vismin= 0.1 ;
  - vismax= 10. ;
  - kx=10. ;
  - ky=10. ;
  - qmax=12.0 ;
  - qmaxz=10.0.

- Paramètres nurméiques de la simulation.
  - $dt = 800$ s ;
  - $dtmax = 800$ s ;
  - $dtmin = 200$ s ;
  - $dx = dy = 10000.$;
  - l_filtrage=.false. ;
  - l_equetalin=.true. ;
  - l_predicor=.true. ;
  - l_perio_x=.true. ;
  - pasor= 24*3600 ;
  - vmxfrot=1.0 ;
  - icon=2 ;
  - on utilise des frontières ouvertes sans couche eponge.

B.4 Test Smolarkiewicz

Dans le fichier PerioAd.F90
- Paramètres physiques utiles pour la simulation ;
  - $H_0 = 5000.$ m ;
  - $Tetaref = 10$ degré C ;
  - kx=0. ;
  - ky=0. ;
  - qmax=12.0 ;
  - qmaxz=10.0.
- Paramètres nurméiques de la simulation.
  - $dt = 2cfldx$ s, soit 500 s ;
  - $dx = dy = 1000.$;
  - $cfl = 0.25$
  - l_equetalin=.true. ;

Bibliography

Arakawa, A. (1966). Computational design for long-term numerical integration of the equations of fluid motion : Two-dimensional incompressional flow. part i. *J. Comput. Phys.*, 1 :119–143.

Bethoux, J. P., Durrieu de Madron, X., Nyffeler, F., and Tailliez, D. (2002). Deep water in the western mediterranean : peculier 1999 and 2000 characteristics, shelf formation hypothesis, variability since 1970 and geochemical inferences. *Journal of Marine Systems*, 33.

Blumberg, A. F. and Mellor, G. L. (1987). A description of a three-dimensional coastal ocean circulation model. *Three-dimensional Coastal Ocean Models, Coastal and Estuarine Sciences*, 4 :1–16.

Echevin, V., Crepon, M., and Mortier, L. (2003). Interaction of coastal current with a gulf : Application to the shelf circulation of the gulf of lions in the mediterranean sea. *J. Phys. Oceanogr.*, 33 :188–206.

Estrounel, C., Durrieu de Madron, X., Marsaleix, P., Auclair, F., Julliand, C., and Vehil, R. (2003). Observation and modeling of winter coastal oceanic circulation in the gulf of lion under wind conditions influenced by the continental orography (fetch experiement). *J. Geophys. Res.*, 108(C3) :8059.

Flexas, M. M., Durrieu de Madron, X., Garcia, M. A., Canals, M., and Arnau, P. (2002). Flow variability in the gulf of lions during the mater hff experiment (march-may 1997). *Journal of Marine Systems*, 33-34 :197–214.

Hua, B. L. and Thomasset, F. (1983). A numerical study of the effects of coast-line geometry on wind-induced upwelling in the gulf of lion. *J. Phys. Oceanogr.*, 13 :678–694.

Lazure, P. and Dumas, F. (2007). An external–internal mode coupling for a 3D hydrodynamical Model for Applications at Regional Scale (MARS). *Advances in Water Resources*. Accepté.

Le Cann, B. (1982). Evolution annuelle de la structure hydrologique du plateau continentale au sud de la bretagne. modélisation numérique. *These de Doctorat de* 3^{eme} *cycle en océanographie physique. Université de Bretagne Occidentale BREST*, page 251p.

Leonard, B. P. (1979). A stable and accurate convective modeling procedure based on quadatic upstream interpolation. *Computer Methods in Applied Machanics and Engineering*, 19 :59–98.

Leonard, B. P. (1988). Universal limiter for transient interpolation modeling of the advective transport equations : The ULTIMATE conservative difference scheme. Technical Memorandum TM-100916 ICOMP-88-11, September, NASA.

Leonard, B. P. (1991). The ultimate conservative difference scheme applied to unsteady one-dimensional advection. *Comp. Methods in Appl. Mech. and Engrg.*, 88 :17–74.

Leonard, B. P., Lock, A. P., and MacVean, M. K. (1996). Conservative explicit unrestricted-timestep multidimensional constancy-preserving advection schemes. *Monthly Weather Review*, 124 :2588–2606.

Leonard, B. P., MacVean, M. K., and Lock, A. (1993). Positivity-preserving numerical schemes for multidimensional advection. Technical Memorandum TM-106055 ICOMP-93-05, March, NASA.

LeVeque, R. J. (1996). High-resolution conservative algorithms for advection in incompressible flow. *SIAM J. Numer. Anal.*, 33(2) :627–655.

Millot, C. (1980). The effect of mistral wind on the ligurian current near provence. *Oceanologica Acta*, 3(4) :399–402.

Millot, C. and Wald, L. (1981). Upwelling in the gulf of lions. *Coastal and Estuarine Science Series*, 1 :160–166.

Pedlosky, J. (1987). Geophysical fluid dynamics. *Springer*.

Penven, P., Debreu, L., Marchesiello, P., and McWilliams, J. C. (2006). Evaluation and application of the roms 1-way embedding procedure to the central california upwelling system. *Ocean Modeling*, 12 :157–187.

Pérenne, N. (2006). Mars, a model for applications at regional scale. *Documentation scientifique v0.1, Hocer S.A.S.*

Reynaud, T., Legrand, P., Mercier, H., and Barnier, B. (1998). A new analysis of hydrographic data in the atlantic and its application to an inverse modelling study. *WOCE newsletter*, 32 :29–31.

Shchepetkin, A. F. and McWilliams, J. C. (2005). The regional oceanic modeling system (ROMS) : a split-explicit, free-surface, topography–following–coordinate oceanic model. *Ocean Modelling*, 9 :347–404.

Smolarkiewicz, P. K. (1992). The multi-dimensional crowley advection scheme. *Mon. Wea. Rev.*, 110 :1968–1983.

Spall, M. A. and Holland, W. R. (1991). A nested primitive equation model for oceanic applications. *J. Phys. Oceanogr.*, 21 :205–220.

Tartinville, B., Deleersnijder, E., Lazure, P., Proctor, R., Ruddick, K. G., and Uittenbogaard, R. E. (1998). A coastal ocean model intercomparison study for a three-dimensional idealized test case. *Applied Mathematical Modeling*, 22 :165–182.